

# 含集总源均匀传输线暂态响应的时域求解

高方平, 姚缨英\*

(浙江大学 电气工程学院, 浙江 杭州 310027)

**摘要:**为解决含集总源均匀传输线的暂态响应问题,将传输线的电路模型和时域有限差分法(FDTD)应用到分析传输线暂态过程的求解中。开展了电路理论、计算数学、程序设计等方面的分析,建立了一种简单、快速、有效的时域数值解法。利用有限时域差分理论对偏微分方程组进行了离散,提出了一种全新的差分计算格式。并根据电压、电流在始端、终端上的约束关系,运用传输线集中参数的等效模型确定了边界条件,通过仿真计算得到了响应波形。此外,对传输线在不同边界条件、传输线耦合等情况下的暂态过程进行 Matlab 编程计算得到了仿真波形,并借助 EMTP-ATP 软件对此仿真结果进行了验证。研究表明,该研究为均匀传输线暂态响应提供了一种简单可行的方法。

**关键词:**电路理论;传输线方程;时域有限差分法;传输线暂态过程;数值解

中图分类号: TM72

文献标志码: A

文章编号: 1001-4551(2012)01-0083-04

## In time-domain to solve transient response of uniform transmission line excited by Lumped-source

GAO Fang-ping, YAO Ying-ying

(College of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

**Abstract:** In order to solve the problems of transient response of uniform transmission line excited by Lumped-source, the model of transmission line and finite-difference time-domain (FDTD) was investigated. After the analysis of circuit theory and computational mathematics and program design, a simple and quick and effective numerical solution in time domain was established. The partial differential equation group dispersed with the theory of FDTD solution. A method was presented to a bran-new differential formation. Furthermore boundary conditions were found to basis lumped equivalent circuit mode at boundary and constraints between voltage and current. Computing and programming to transmission line transient with different conditions of boundary and two line coupling or even more complicated loading were carried out, simulation waveforms were gotten. By comparing the waveforms with the simulated waveforms obtained through the EMTP-ATP simulation software, the all results were tested. The results indicate that the analysis provides a simple and feasible method for solving the transient response of uniform transmission line.

**Key words:** circuit theory; transmission-line equations; finite difference time domain(FDTD); transmission lines transient process; numerical solution

## 0 引 言

在高压远距离交流电力线路、高频信号电信线路中,在同一瞬间沿线的电压、电流都不相同,必须作为分布参数处理。计算机和高速数控系统,虽然线路尺寸不大,但当线路尺寸  $l > \lambda/30$  时,如仍采用集总参

数电路的方法会造成很大误差。同样在极短时的冲击电压(或电流)的作用下,也需要用分布参数的方法处理。在分布参数电路中,电压、电流不仅是时间的函数,而且是距离的函数,列写的动态方程是偏微分方程。用时域法或复频域法求解传输线方程都有相当的难度,不易获得解析解。因此为了解决某些实际问题,

收稿日期:2011-07-08

作者简介:高方平(1984-),女,浙江杭州人,主要从事雷击导线产生的感应过电压和电磁兼容方面的研究。E-mail:gaofangp@126.com

通信联系人:姚缨英,女,教授,博士生导师。E-mail:yaoyyzju@126.com

应用数值求解方法去分析传输线成为了一个研究方向<sup>[1]</sup>。

1966 年由 K. S. Yee 提出的时域有限差分(FDTD)法的主要思想是把 Maxwell 方程在空间、时间上离散化,用差分方程代替一阶偏微分方程,求解差分方程组,从而得出各网格单元的场值<sup>[2-3]</sup>。由于 FDTD 算法简单,精度较高,计算量较小,不管是在高压输电线路过电压电流的计算还是在高速集成电路中互连效应的分析中,应用 FDTD 算法较多<sup>[4]</sup>。传输线方程的时域数值解法还有传输线矩阵(TLM)方法、传输线模型法、波形松弛算法、精细积分法、状态空间分析法以及其他差分格式的应用<sup>[5]</sup>。文献[6-9]根据 FDTD 法原理采用不同的差分格式解传输线方程并分析传输线的暂态过程,但是其给出的迭代方程式较难理解,且编程比较麻烦。

本研究应用 FDTD 法原理给出一种简单、快速、有效的差分格式,从时域响应角度讨论两线传输线在各种情况下的暂态过程问题,求解传输线方程。该方法具有编程易、计算速度快、可以直接得出时域数值解的优点;并能够计算零(非零)初始值、具有线性(非线性)负载的均匀(非均匀)传输线的暂态响应。

## 1 均匀传输线分布参数电路及电报方程

双传输线结构图如图 1 所示。在均匀传输线的始端  $x$  处取一小段长度元  $dx$ 。在此  $dx$  段中,设导线的电阻为  $R_0 dx$ ,电感为  $L_0 dx$ ,导线间漏电导为  $G_0 dx$ ,导线间漏电容为  $C_0 dx$ 。

均匀传输线的分布参数电路如图 2 所示。其中  $R_0$ 、 $L_0$ 、 $G_0$ 、 $C_0$  是表征传输线特性的电路参数,分别表示导线每单位长度的电阻、电感以及单位长度导线之间的电导和电容。

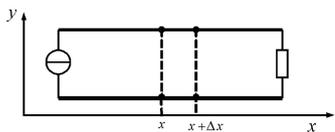


图 1 双传输线结构图

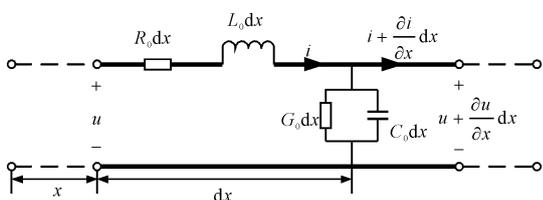


图 2 均匀传输线的分布参数电路

本研究经过推导得均匀传输线的电报方程如下:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad (1)$$

式(1)表明:均匀传输线上连续分布的电阻和电感分别引起相应的电位降致使线间电压沿线变化;均匀传输线导线间连续分布的漏电导和电容分别在线间引起相应的泄漏电流和位移电流,致使电流沿线变化。

## 2 用 FDTD 法求解传输线方程的推导

### 2.1 FDTD 法的原理及具体应用

本研究运用 FDTD 的原理,取节点电压和两点之间的电流作为求解分量,将传输线沿线的传输方向以空间间隔  $\Delta x$  进行一维空间离散。设传输线的总长为  $L$ ,总共被离散成  $M$  段,将第一点设为电压节点  $u_1$ ,依次下去设定为  $u_2, u_3, \dots, u_{M+1}$ ,它们的空间坐标分别为  $0, \Delta x, 2\Delta x, \dots, M\Delta x$ 。然后将  $u_1$  和  $u_2$  之间的支路电流设定为  $i_1$ ,将  $u_2$  和  $u_3$  之间的支路电流设定为  $i_2$ ,依次下去设定为  $i_3, i_4, i_5, \dots, i_M$ ,它们的空间坐标分别取为  $0.5\Delta x, (1+0.5)\Delta x, (2+0.5)\Delta x, \dots, (M-0.5)\Delta x$ 。这样电压离散节点共有  $M+1$  个,电流节点离散点有  $M$  个。电压和电流节点交错设置,其空间间隔为  $0.5\Delta x$ 。同时,对时间步长按步长为  $\Delta t$  进行离散,设求解总时间为  $T$ ,离散为  $n$  段,初始时刻为  $0$ ,下一时刻依次为  $\Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t$ 。按照以上过程,传输线的电压和电流波过程就变成了一组空间、时间上的离散点。

其空间节点取样示意图如图 3 所示。其时空迭代关系如图 4 所示。

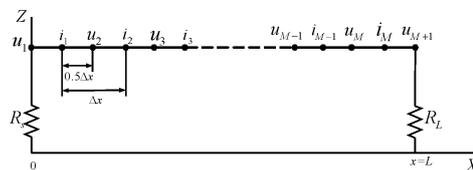


图 3 沿架空线空间离散的示意图

### 2.2 迭代方程式的推导

本研究利用中心差分进行空间和时间的离散,即:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{2j+1}^{2(k+1)} - u_{2j-1}^{2(k+1)}}{\Delta x} \\ \frac{\partial i}{\partial x} = \frac{i_{2(j+1)}^{2k+1} - i_{2j}^{2k+1}}{\Delta x} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{i_{2j}^{2(k+1)+1} - i_{2j}^{2k+1}}{\Delta t} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{2j+1}^{2(k+1)} - u_{2j+1}^{2k}}{\Delta t} \end{cases} \quad (3)$$

本研究将式(2)和式(3)代入式(1),得到如下表达式:

$$\begin{cases} -\frac{u_{2j+1}^{2(k+1)} - u_{2j-1}^{2(k+1)}}{\Delta x} = R_0 i_{2j}^{2k+1} + L_0 \frac{i_{2j}^{2(k+1)+1} - i_{2j}^{2k+1}}{\Delta t} \\ -\frac{i_{2(j+1)}^{2k+1} - i_{2j}^{2k+1}}{\Delta x} = G_0 u_{2j+1}^{2k} + C_0 \frac{u_{2j+1}^{2(k+1)} - u_{2j+1}^{2k}}{\Delta t} \end{cases} \quad (4)$$

整理得:

$$\begin{cases} i_{2j}^{2(k+1)+1} = \frac{\Delta t}{L_0} \left[ \left( \frac{L_0}{\Delta t} - R_0 \right) i_{2j}^{2k+1} + \frac{u_{2j-1}^{2(k+1)} - u_{2j+1}^{2(k+1)}}{\Delta x} \right] \\ u_{2j+1}^{2(k+1)} = \frac{\Delta t}{C_0} \left[ \left( \frac{C_0}{\Delta t} - G_0 \right) u_{2j+1}^{2k} + \frac{i_{2j}^{2k+1} - i_{2(j+1)}^{2k+1}}{\Delta x} \right] \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (5)$$

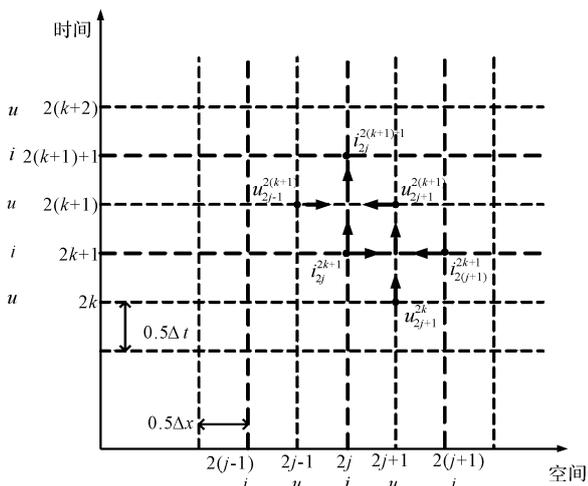


图 4 电压、电流时空离散图

### 2.3 确立边界条件

考虑传输线末端负载,并计及传输线单位长电阻、电导参数时,可得传输线的等效分布参数电路图如图 5 所示。 $u_s$  表示始端电压源。 $R_s$ 、 $R_L$  分别表示始端负载和末端负载。整条传输线可视为无数多个微分段级联而成,每个微分段是由  $R_0 dx$ 、 $L_0 dx$ 、 $C_0 dx$ 、 $G_0 dx$  构成的集中参数电路。在线路的始端、终端利用集中参数电路模型,推导偏微分方程数值解的边界条件。

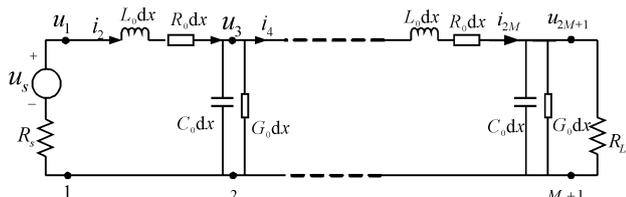


图 5 传输线的等效分布参数电路图

始端和末端电路依然满足基尔霍夫定律,从图 5 可知,首端的电压、电流关系如下:

$$u_1 = u_s - R_s i_2 \quad (6)$$

则其迭代方程式为:

$$u_1^{2(k+1)} = u_s^{2k} - R_s i_2^{2k+1} \quad (7)$$

从图 5 可知,电路末端的电压电流关系如下:

$$i_{2M} - \frac{u_{2M+1}}{R_L} = C_0 dx \frac{\partial u_{2M+1}}{\partial t} + G_0 dx u_{2M+1} \quad (8)$$

本研究将  $\partial u_{2M+1} / \partial t = (u_{2M+1}^{2(k+1)} - u_{2M+1}^{2k}) / \Delta t$  代入式(8),并整理得到如下迭代方程式:

$$u_{2M+1}^{2(k+1)} = \frac{\Delta t}{C_0 dx} \left[ \left( \frac{C_0 dx}{\Delta t} - G_0 dx - \frac{1}{R_L} \right) u_{2M+1}^{2k} + i_{2M}^{2k+1} \right] \quad (9)$$

综合式(5,7,9),即得到求解传输线方程的迭代方程组。

### 2.4 计算稳定性要求

一个差分格式是否有效,最终要看差分方程的精确解能否任意逼近微分方程的解。这就是要考虑差分格式的收敛性和稳定性。Lax 等价定理<sup>[10-12]</sup>:对于一个适定的线性初值问题,若逼近它的差分格式是相容的则差分格式收敛的充要条件为该格式稳定。该定理可将收敛性的讨论转化为稳定性的讨论,因此只讨论稳定性即可。

本研究采用文献[3]中计算稳定性要求的方法,最后推导出  $c\Delta t \leq \Delta x$ 。上式表明,时间间隔必须小于或等于波以光速通过空间步长所需的时间。

## 3 算例验证及分析

电磁暂态分析软件 EMTP 具有分析功能多、元件模型全和运算结果精确等优点,对于电网的稳态和暂态都可做仿真分析。因此,本研究将算例用 FDTD 法得到的电压波形与 EMTP 仿真得到的波形进行对比,验证本研究方法的可行性。

**算例 1** 已知电磁波在传输线中的最大传播速度  $v = 2 \times 10^8$  m/s,传输线长  $L = 800$  m,传输线的分布参数  $R_0 = G_0 = 0$ ,  $L_0 = 2.5 \times 10^{-7}$  H/m,  $C_0 = 1 \times 10^{-10}$  F/m,其特征阻抗  $Z_c = 50 \Omega$ ,电源内阻  $R_s = 100 \Omega$ ,负载电阻为  $R_L = 200 \Omega$ ,激励源  $u_s = 60 \varepsilon(t)$  V。本研究用 FDTD 法计算出负载端电压

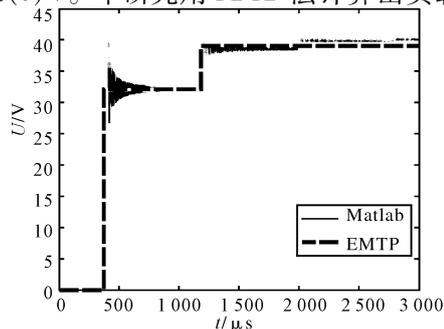


图 6 仿真得到的负载电压波形

的结果和 EMTP 仿真得到的波形图如图 6 所示: 在 12 μs 时, 负载端电压达到稳定值 40 V。在 4 μs 时, 电压波到达末端, 末端负载电压发生数值振荡。其原因是激励源为理想阶跃电压源, 在零时刻存在一个突变, 其中包含了大量的高频分量。

**算例 2** 传输线参数同上例, 将电压源为双指数波形电压源, 表达式为  $u(t) = 60 \times (e^{-8 \times 10^5 t} - e^{-1 \times 10^6 t})$  V, 末端接负载及其等效电路如图 7 所示,  $R_L = 100 \Omega$ ,  $L_L = 1$  H,  $C_L = 1 \times 10^{-9}$  F, 求负载电压波形。

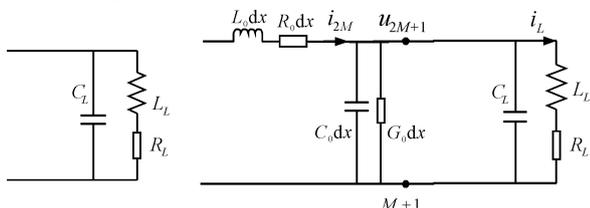


图 7 含动态元件负载及其等效电路图

与图 11 相对应的末端边界条件满足如下方程式:

$$\begin{cases} i_{2M} = G_0 dx u_{2M+1} + (C_0 dx + C_L) \frac{\partial u_{2M+1}}{\partial t} + i_L \\ L \frac{\partial i_L}{\partial t} + R_L i_L = u_{2M+1} \end{cases} \quad (10)$$

本研究将  $\partial u_{2M+1} / \partial t = (u_{2M+1}^{2(k+1)} - u_{2M+1}^{2k}) / \Delta t$  及  $\partial i_L / \partial t = (i_L^{2(k+1)+1} - i_L^{2k+1}) / \Delta t$  代入式(10), 并整理得到如下迭代方程式:

$$\begin{cases} u_{2M+1}^{2(k+1)} = \frac{\Delta t}{C_0 dx + C_L} [i_{2M}^{2k+1} - i_L^{2k+1} + (\frac{C_0 dx + C_L}{\Delta t} - G_0 dx) u_{2M+1}^{2k}] \\ i_L^{2(k+1)+1} = \frac{\Delta t}{L} [u_{2M+1}^{2k} + (\frac{L}{\Delta t} - R_L) i_L^{2k+1}] \end{cases} \quad (11)$$

本研究用 Matlab 和 EMTP 仿真得到的波形如图 8 所示。对比可知两种仿真波形非常接近。

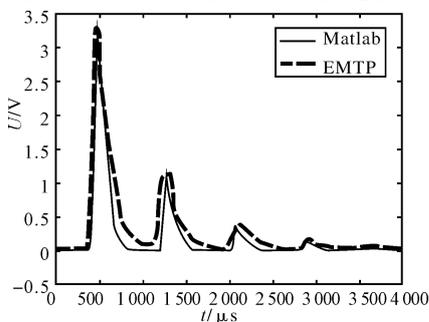


图 8 仿真得到的负载电压波形

综上所述, 按本研究提出的 FDTD 迭代格式得到的电压波形与 EMTP 仿真得到的波形在各极值以及变化规律方面完全一致, 验证了该方法的可行性。

## 4 结束语

对于一阶双曲型的传输线方程, 本研究应用 FDTD 法给出了一种简单、快速、有效的差分格式, 从时域响应角度讨论了两线传输线在各种情况下的暂态过程问题, 分析了传输线的传输特性。本研究利用电压、电流在始端、终端上的约束关系, 运用传输线集总参数的等效模型确定边界条件; 最后利用 Matlab 编程计算, 仿真得到响应波形, 并且将该波形与用 EMTP-ATP 软件仿真得到的波形进行对比, 验证了该方法的可行性。

### 参考文献 (References):

- [1] STEPHEN D G. Introduction to the Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Method for Electromagnetics [M]. San Francisco; Morgan & Claypool Publishers, 2010.
- [2] DENNIS M S. Electromagnetic Simulation using the FDTD Method [M]. New York; IEEE Press, 2000.
- [3] CLAYTON R P. Incorporation of terminal constraints in the FDTD analysis of transmission lines [J]. **IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility**, 1994, 36(2): 85-91.
- [4] BEHZAD K, JOE L, GREG E B. Finite-difference analysis of dispersive transmission lines within a circuit simulator [J]. **IEEE Transactions on Power Delivery**, 2006, 21(1): 234-242.
- [5] 郑生富. 有损均匀传输线的时域有限差分法研究 [D]. 重庆: 重庆大学通信工程学院, 2007.
- [6] ZHONG Xiao-long, LIU Yao-wu, MEI K K. A new time-domain method based on the general transmission-line equations [J]. **Microwave and Optical Technology Letters**, 2002, 32(1): 46-51.
- [7] RODEN J A, CLAYTON R P, SMITH W T, et al. Finite-difference time-domain analysis of lossy transmission lines [J]. **IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility**, 1996, 38(1): 15-24.
- [8] MATTHEW N O S. Numerical Techniques in Electromagnetics [M]. New York: CRC Press, 2001.
- [9] 张志军. 电磁脉冲对传输线耦合规律的研究 [D]. 北京: 华北电力大学电气工程学院, 2006.
- [10] ALLENT. Computational Electrodynamics the Finite-Difference Time-Domain Method [M]. Boston: Artech House Publisher, 1995.
- [11] KARLS K, RATMOND J L. The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics [M]. New York: CRC Press, 1993.
- [12] SEMLYEN A, ABDEL R M. A state variable approach for the calculation of switching transients on a power transmission line [J]. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, 1982, 29(9): 624-633

[编辑: 李 辉]