

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2015.03.001

非对称结构单摆的理论及试验研究*

程光明, 胡意立, 李晓旭, 李新辉, 温建明, 曾 平
(浙江师范大学 精密机械研究所, 浙江 金华 321004)

摘要:针对惯性式压电精密驱动器的非对称振动驱动机理难以分析的问题,提出了一种非对称结构的单摆,探讨了模型结构和运动原理。建立了非线性动力学方程,从能量转换和运动周期两个方面,分析了非对称单摆的工作特性。在此基础上,设计、研制了实物模型;以初始释放角度 θ_0 、中心距 R 和摆长 L_1 为影响因素,对非对称单摆进行了周期特性试验。研究结果表明,非对称单摆具有两侧摆长、最大摆角和两侧半周期运动时间均不相同的特点;大摆角运动周期随初始释放角度 θ_0 和摆长 L_1 的增大而增大,随中心距 R 的增大而减小,周期理论计算结果和试验测试结果具有较好的重合性。非对称结构单摆工作特性的研究结果可为后续的惯性式压电精密驱动器的研发和设计打下坚实的基础。

关键词:单摆;非对称结构;振动;周期

中图分类号:TH128;TH113.1

文献标志码:A

文章编号:1001-4551(2015)03-0301-06

Theoretical and experimental research of asymmetric single pendulum

CHENG Guang-ming, HU Yi-li, LI Xiao-xu, LI Xin-hui, WEN Jian-ming, ZENG Ping
(The Institute of Precision Machinery, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

Abstract: Aiming at the problem that the driving principle of asymmetric vibration was difficult to analyzed in the inertial piezoelectric precise actuators, the simple pendulum with asymmetric structure was proposed. Firstly its model structure and motion principle were discussed. After constructing the nonlinear dynamic equation, the working characteristics was analyzed in two major areas: energy transformation and period of motion. Then, the prototype was designed and fabricated. A series of experiments were performed to test the impact of the initial releasing angle θ_0 , center distance R and length L_1 on the period of motion. The research results indicate that the pendulum length, maximum angle and half period on each side are all different. The motion period of asymmetric single pendulum under large angle condition increases with the increase of the initial releasing angle θ_0 and length L_1 , but decreases with the increase of the center distance R . The theoretical results of the period are coincident very well with the experiments. The results of the working characteristics of the simple pendulum with asymmetric structure lay the foundation of the development and design of inertial piezoelectric precise actuators.

Key words: single pendulum; asymmetric structure; vibration; period

0 引 言

振动现象广泛存在于人类的生活和生产实际中。振动可根据不同的特征分为不同的种类^[1]。近年来,国内外科研工作者从非对称的视角出发,已经开展了许多非对称振动的基础研究工作^[2-3]。在精密驱动领域,压电惯性驱动器利用压电元件的非对称振动来驱

使机构运动^[4-6]。这类压电元件非对称振动的成因,从广义上说,主要可以归纳为激励信号、振子结构和外部约束的非对称设计。例如,在激励信号非对称设计方面,Dalius Mazeika, Piotr Vasiljev^[7]提出非对称三角波的电控方式,研制了一种直线型压电惯性驱动器,最大输出速度和负载可达 20 mm/s, 8 g。W. M. Chen 等人^[8]以非对称占空比的矩形波作为驱动信号,开发研

收稿日期:2014-11-18

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51175478, 51205369);浙江省自然科学基金资助项目(Y1110529)

作者简介:程光明(1957-),男,吉林长春人,博士,教授,博士生导师,主要从事压电精密驱动方面的研究。E-mail:cgm123@163.com

制了新型二自由度压电惯性驱动器,直线和旋转速度分别可达 21 mm/s, 3.72 rad/s。在振子结构非对称设计方面, Ping Zeng 等人^[9]提出以非对称夹持结构的压电双晶片振子为动力元件,利用振子非对称振动产生惯性力差的机理研制了一种新型压电马达,最小分辨率和最大线速度可达 0.02 μm 和 16.87 mm/s。在外部约束的非对称设计方面, Jianming Wen 等人^[10]研制了一种新型压电旋转驱动器,该驱动器在顺时针运动时通过改变正压力来产生非对称的摩擦力矩,从而实现驱动器的定向转动,最小分辨率可达 10 μrad 。 Xiaotao Li 等人^[11]研制了一种基于非对称摩擦力与惯性力匹配的压电直线驱动器,最大速度和输出力分别可达 5 mm/s 和 10 N。虽然,学者们已利用非对称振动研制了多种压电惯性驱动器,其驱动机理仍需进一步深入研究和分析。因此,本研究提出一种非对称结构的单摆,尝试用以探讨和解释该类驱动器的致动原理。

作为物理学中的经典模型,单摆是研究和讨论振动机理的理想角色^[12-13]。因此,本研究提出以一种非对称单摆为研究对象,将从能量特性和周期特性角度出发,对该单摆在周期运动中所表现出的非对称振动特性进行理论分析,从而为非对称驱动的机理分析提供一种新思路。

1 非对称单摆模型结构和边界条件

本研究所提出的非对称单摆是一种通过在单摆圆心垂直位置向下点设置固定支点的方法,使左、右摆动半径产生变化的新型单摆结构装置。非对称单摆模型主要由摆球、摆线和钢钉 3 个部分组成。其中,假设模型中摆线为不可伸缩的轻质细绳,摆球半径远小于摆线长度,布置在中心线上的钢钉不产生变形与位移。

非对称单摆运动原理如图 1 所示。球在微小扰动下从中心线一侧自由释放,在重力作用下周期性来回摆动。

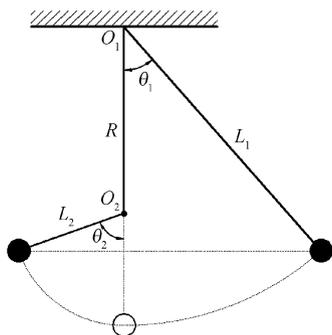


图 1 非对称结构单摆模型

每当摆球经过中心线时,钢钉对摆线产生阻挡作用,摆动中心将在 O_1 和 O_2 间交替变换,摆长 L_1 和 L_2 也随之产生更替,其中 R 为 O_1 和 O_2 的中心距。换言之,在一个运动周期中,摆动中心和摆长条件将改变两次。为了方便研究与讨论,可将非对称单摆的运动过程以中心线为界,分为左、右两个部分,任意时刻的摆角分别为 θ_1, θ_2 。

2 理论分析

2.1 非对称单摆动力学方程

为了探讨所提出的非对称单摆的动力学方程,本研究首先分析长度为 l ,摆球质量为 m 的对称单摆运动原理。在摆线长度远大于摆球半径和忽略摆线质量的条件下,且考虑阻尼影响因素,根据牛顿第二定律,对称单摆在周期性驱动力作用下的动力学方程为:

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = F \cos \bar{\omega}_D t - cl \frac{d\theta}{dt} - mg \sin \theta \quad (1)$$

式中: θ —角位移, c —阻尼系数, g —重力加速度, $F \cos \bar{\omega}_D t$ —周期性驱动力。

令 $P(t) = F \cos \bar{\omega}_D t / ml$, $\alpha = c/m$, $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, 式可表示为:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \alpha \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin \theta = P(t) \quad (2)$$

由于铅垂平面内钢钉的存在,非对称单摆在振动过程中每次通过中心线时,将同时改变摆动中心和摆长。在不考虑空气阻力和悬挂点摩擦的条件下,非对称单摆在中心线左、右两侧的振动微分方程可以表述为:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \omega_1^2 \sin \theta_1 &= 0 \\ \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \omega_2^2 \sin \theta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

式中: $\omega_1 = \sqrt{g/L_1}$; $\omega_2 = \sqrt{g/L_2}$ 。

2.2 非对称单摆的能量分析

若不考虑能量耗散,非对称单摆在运动过程中只受到摆球重力做功,所组成的保守系统机械能守恒,系统总能量为:

$$E_m = E_k + E_p \quad (4)$$

若将摆球运动轨迹的最低点作为零势能点,非对称单摆在运动过程中左右两部分的动能和势能可以分别表示为:

$$\begin{aligned} E_{k1} &= \frac{1}{2} m L_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ E_{k2} &= \frac{1}{2} m L_2^2 \dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} E_{p1} &= mgL_1(1 - \cos\theta_1) \\ E_{p2} &= mgL_2(1 - \cos\theta_2) \end{aligned} \quad (6)$$

实际操作中,可以选择中心线两侧选择满足边界条件的任意一点,作为自由释放的起始位置。以起始位置为右侧为例,运动初始条件为 $\theta_{1\max} = \theta_0$,摆球在释放瞬间的动能、势能和总能量分别为:

$$E_{k1}(\theta_1 = \theta_0) = 0 \quad (7)$$

$$E_{p1}(\theta_1 = \theta_0) = E_m = mgL_1(1 - \cos\theta_0) \quad (8)$$

根据三角函数诱导公式 $2\sin^2(\theta/2) = 1 - \cos\theta$,当非对称单摆在两侧来回摆动时,系统任意时刻的总能量和势能可以表示为:

$$E_m = 2mgL_1\sin^2(\theta_0/2) \quad (9)$$

$$E_{p1} = 2mgL_1\sin^2(\theta_1/2) \quad (10)$$

$$E_{p2} = 2mgL_2\sin^2(\theta_2/2)$$

由式得,动能是总能量与势能的差值,即 $E_{k1} = E_m - E_{p1}$,系统在两侧的动能可以表示为:

$$E_{k1} = 2mgL_1[\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta_1/2)] \quad (11)$$

$$E_{k2} = 2mg[L_1\sin^2(\theta_0/2) - L_2\sin^2(\theta_2/2)]$$

若起始位置为左侧,运动初始条件为 $\theta_{2\max} = \theta_0$,根据上述相同推导过程,可得到任意时刻系统的总能量、势能和动能分别为:

$$E_m = 2mgL_2\sin^2(\theta_0/2) \quad (12)$$

$$E_{p1} = 2mgL_1\sin^2(\theta_1/2) \quad (13)$$

$$E_{p2} = 2mgL_2\sin^2(\theta_2/2)$$

$$E_{k1} = 2mg[L_2\sin^2(\theta_0/2) - L_1\sin^2(\theta_1/2)] \quad (14)$$

$$E_{k2} = 2mgL_2[\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta_2/2)]$$

由式(12~14)的理论推导可知,非对称单摆从左侧和右侧自由释放的运动过程具有相似的能量特性。根据上述推导,本研究用 Matlab 软件绘制了系统机械能、动能、势能与摆球所处位置的关系曲线如图 2 所示。

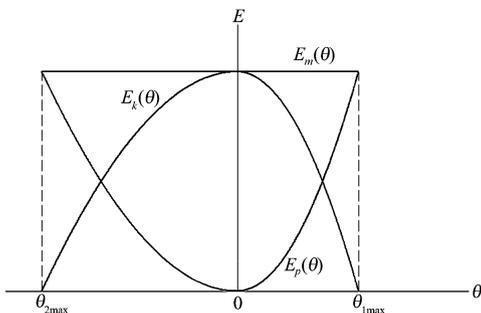


图 2 非对称单摆运动过程中的机械能、动能和势能

图 2 表明,在铅垂方向,非对称单摆具有能量守恒特性,即系统机械能总量始终保持不变;在水平方向上,由于非对称单摆的运动不对称性,动能和势能也表

现出左右两侧不对称的特点,且两者在摆长 L_1 侧的平均变化率均大于摆长 L_2 侧。

2.3 非对称单摆的周期分析

周期是单摆研究中的热点问题。国内外学者已利用椭圆积分法^[14]、算数几何平均法^[15]、超几何法^[16]等方法,提出了大量关于单摆周期问题的精确解和近似解。本研究将根据已建立的动力学方程,采用中心线左、右两侧运动时间叠加的方式,在大摆角情况下研究非对称单摆的周期影响因素。

当摆角较大时,非对称单摆的运动不再是简谐振动,而是非线性振动。根据机械能守恒定律,无阻尼单摆运动的精确周期公式实际上可以用第一类椭圆积分表达^[17]:

$$T = 2 \sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\theta_0} [\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)]^{-\frac{1}{2}} d\theta \quad (15)$$

式中: L —摆长, θ_0 —初始释放角度, θ —摆角。

根据上式,可获得非对称单摆在两侧的运动时间分别为:

$$T_1 = \sqrt{\frac{L_1}{g}} \int_0^{\theta_{1\max}} [\sin^2(\theta_{1\max}/2) - \sin^2(\theta_1/2)]^{-\frac{1}{2}} d\theta_1$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{L_2}{g}} \int_0^{\theta_{2\max}} [\sin^2(\theta_{2\max}/2) - \sin^2(\theta_2/2)]^{-\frac{1}{2}} d\theta_2 \quad (16)$$

式中: L_1, L_2 —两侧摆长; $\theta_{1\max}, \theta_{2\max}$ —左、右两侧最大摆角; θ_1, θ_2 —左、右两侧摆角。

将上述左、右两侧的运动时间叠加,得出大摆角非对称单摆的精确周期公式为:

$$T = T_1 + T_2 \quad (17)$$

上述所得的精确周期公式属于第一类椭圆积分,须查积分表才可得出周期值,计算时较为繁琐。为了方便理论研究和仿真,故本研究引用 F. M. S. Lima^[18]所提出的准确度较高的近似周期计算公式:

$$T = -T_0 \frac{\ln a}{1-a} \quad (18)$$

式中: $T_0 = 2\pi \sqrt{L/g}$, $a = \cos(\theta_0/2)$

根据式(18),可获得非对称单摆在两侧的运动时间分别为:

$$T_1 = -\pi \sqrt{L_1/g} \frac{\ln(\cos(\theta_{1\max}/2))}{1 - \cos(\theta_{1\max}/2)} \quad (19)$$

$$T_2 = -\pi \sqrt{L_2/g} \frac{\ln(\cos(\theta_{2\max}/2))}{1 - \cos(\theta_{2\max}/2)}$$

将两侧的运动时间叠加后,得到大摆角非对称单

摆准确度较高的近似周期公式:

$$T = T_1 + T_2 = -\pi \sqrt{L_1/g} \frac{\ln(\cos(\theta_{1\max}/2))}{1 - \cos(\theta_{1\max}/2)} + \sqrt{L_2/g} \frac{\ln(\cos(\theta_{2\max}/2))}{1 - \cos(\theta_{2\max}/2)} \quad (20)$$

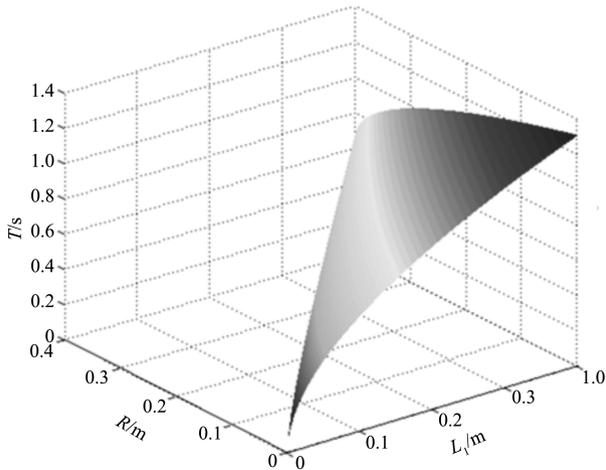
由于 $L_2 = L_1 - R$, 式(20)可以转换为:

$$T = -\pi \sqrt{L_1/g} \frac{\ln(\cos(\theta_{1\max}/2))}{1 - \cos(\theta_{1\max}/2)} + \sqrt{(L_1 - R)/g} \frac{\ln(\cos(\theta_{2\max}/2))}{1 - \cos(\theta_{2\max}/2)} \quad (21)$$

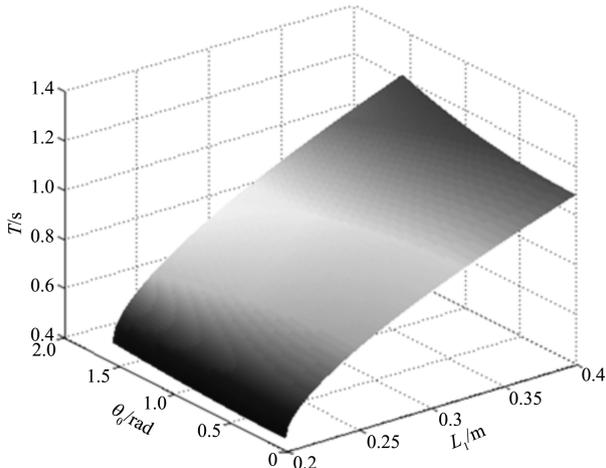
式中: $\theta_{1\max}, \theta_{2\max}$ 一两侧最大摆角由摆球初始释放位置和释放角度 θ_0 确定。

式(21)表明, 此时非对称单摆的周期与摆长 L_1 、中心距 R 和初始释放角度 θ_0 有关, 且在左右两侧同一高度释放时具有相同的周期特性。

为了从理论上分析 3 种因素与周期的关系, 根据上式, 笔者用 Matlab 软件绘制三者对周期的影响趋势图如图 3 所示。



(a) 周期与摆长 L_1 和中心距 R 的关系



(b) 周期与摆长 L_1 和释放角度 θ_0 的关系

图 3 非对称单摆运动周期与摆长 L_1 、中心距 R 和初始释放角度 θ_0 的关系

图 3 表明, 在大摆角情况下 ($\theta \geq 10^\circ$), 非对称单摆的周期随着摆长 L_1 和初始释放角度 θ_0 的增大而增大, 随着中心距 R 的增大而减小。此外, 上式也表明, 由于左、右两侧摆长和最大摆角条件不同, 非对称单摆具有左、右两侧半周期运动时间不同的特点。

3 试验结果与讨论

为了检验非对称单摆周期振动的理论分析, 探究初始释放角度 θ_0 、摆长 L_1 和中心距 R 3 个因素对周期的影响, 本研究设计和制作了非对称单摆模型, 并组建了非对称单摆周期振动测试系统。

3.1 试验系统

非对称单摆模型和周期振动测试系统如图 4 所示。

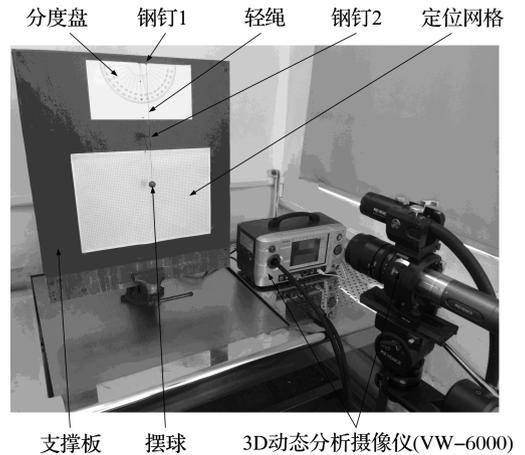


图 4 非对称单摆周期特性测试系统

非对称单摆模型主要由摆球、轻质细绳和两个钢钉组成。摆球质量为 0.03 kg , 直径为 0.02 m 。摆长 L_1 为摆球球心至右侧摆动中心点 O_1 的距离, L_2 为摆球球心至左侧摆动中心点 O_2 的距离。非对称单摆周期特性测试系统主要部件有非对称单摆模型、3D 动态分析摄像机、支撑板和定位网格纸。3D 动态分析摄像机由 KEYENCE 公司生产, 包括控制器与镜头两个部分, 分辨率可达微秒级, 在试验中用于精密测量摆球的运动轨迹和记录摆球周期运动的时间。

3.2 周期振动试验

由理论分析可知, 在左、右两侧同一高度释放摆球时, 非对称单摆具有相同的周期特性, 其中, 摆长 L_1 、中心距 R 和初始释放角度 θ_0 是非对称单摆运动周期的主要影响因素。试验时, 在上述 3 种影响因素的不同初始条件下, 笔者利用所组建的测试系统对非对称单摆的周期振动进行了测试与记录。为了使得试验更

易控制,结果更为准确,摆球初始释放位置均选在中心线右侧。

3.2.1 周期振动试验周期与初始释放角度 θ_0 的关系

在摆长 L_1 和中心距 R 相同条件下,非对称单摆运动周期随初始释放角度 θ_0 变化的仿真与试验结果如图5所示。

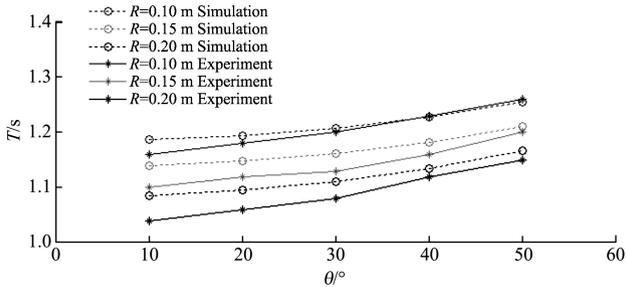


图5 周期与初始释放角度 θ_0 关系仿真与试验曲线

图5中,摆长为0.4 m,中心距为0.1 m,0.15 m和0.2 m,分别计算和测试了初始释放角度从10°~50°的运动周期。

图5曲线表明,非对称单摆的周期随着初始释放角度的增大而非线性增大,增长速率逐渐提高。

3.2.2 周期与摆长 L_1 的关系

在中心距 R 和初始释放角度 θ_0 相同条件下,非对称单摆运动周期随摆长 L_1 变化的仿真与试验结果如图6所示。

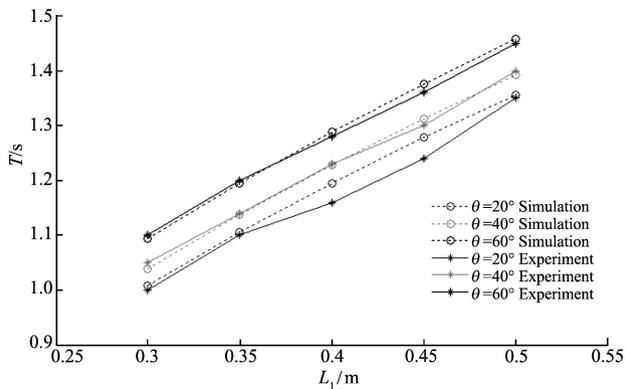


图6 周期与摆长 L_1 关系仿真与试验曲线

图6中,中心距为0.1 m,初始释放角度为20°,40°和60°,本研究分别计算和测试了摆长 L_1 从0.3 m~0.5 m的运动周期。

图6曲线表明,非对称单摆的周期随着摆长 L_1 的增大而非线性增大,增长速率逐渐降低。

3.2.3 试验系统周期与中心距 R 的关系

在初始释放角度 θ_0 和摆长 L_1 相同条件下,非对称单摆运动周期随中心距 R 变化的仿真与试验结果如图7所示。

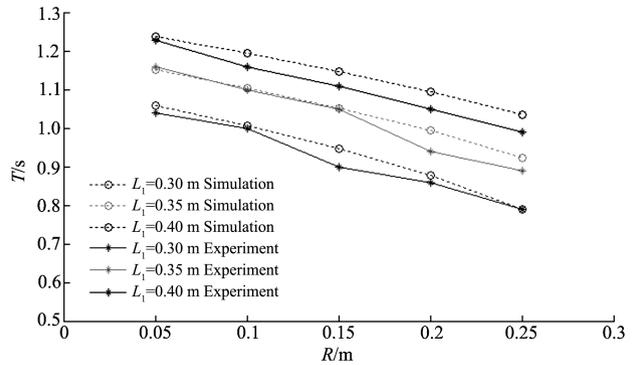


图7 周期与中心距 R 关系仿真与试验曲线

图7中,初始释放角度为20°,摆长为0.3 m,0.35 m和0.4 m,分别计算和测试了中心距 R 从0.05 m~0.25 m的运动周期。

图7曲线表明,非对称单摆的周期随着中心距 R 的增大而非线性减小,减小速率逐渐提高。

以上结果表明:大摆角非对称单摆的运动周期随着摆长 L_1 和初始释放角度 θ_0 的增大而增大,随着中心距 R 的增大而减小,且3种因素影响下周期增大或减小速率的变化规律各不相同;另一方面,摆长 L_1 、初始释放角度 θ_0 和中心距 R 不同条件下,非对称单摆周期在的试验与仿真结果变化趋势一致,具有较好的重合性。

观察发现,周期的试验测试值总体略小于仿真计算值,其原因是仿真时的周期理论计算忽略了空气阻尼和摩擦的影响。

4 结束语

本研究提出一种非对称单摆,通过理论和试验相结合的方式,对非对称振动现象的机理进行了初步探讨。总体研究结果表明,中心线两侧的摆长差异引起了单摆的运动不对称性,最终使其在能量和半周期运动时间上分别表现出了不对称的特点。

本研究所提出的运用非对称单摆研究非对称振动机理的策略,以及在研究工作中所获得的规律和结论,为非对称驱动的机理分析提供了新的思路。

最后,有关非对称单摆的理论研究还有待学者们作进一步的完善与补充。

参考文献 (References):

[1] PAEZ T L. Random vibration-a brief history[J]. **Sound & vibration**,2012,46(1):52-60.
 [2] TARIVERDILLO S, SHAHMARDANI M, MIRZAPOUR J, et

- al. Asymmetric free vibration of circular plate in contact with Incompressible fluid [J]. **Applied Mathematical Modelling**, 2013, 37(1): 228-239.
- [3] PARK J C, PARK J Y. Asymmetric PZT bimorph cantilever for multi-dimensional ambient vibration harvesting [J]. **Ceramics International**, 2013(39): S653-S657.
- [4] LING S F, XIE Y. Monitoring structural integrity using a piezoelectric inertial actuator cum sensor [J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2001, 247(4): 731-737.
- [5] ZHANG Z M, AN Q, LI J W, et al. Piezoelectric friction-inertia actuator—a critical review and future perspective [J]. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, 2012, 62(5-8): 669-685.
- [6] SHI Y, ZHAO C. Simple new ultrasonic piezoelectric actuator for precision linear positioning [J]. **Journal of electroceramics**, 2012, 28(4): 233-239.
- [7] MAZEIKA D, VASIJEV P. Linear inertial piezoelectric motor with bimorph disc [J]. **Mechanical Systems and Signal Processing**, 2013, 36(1): 110-117.
- [8] CHEN W M, LIU T S. Modeling and experimental validation of new two degree-of-freedom piezoelectric actuators [J]. **Mechatronics**, 2013, 23(8): 1163-1170.
- [9] ZENG P, SUN S, LI L, et al. Design and testing of a novel piezoelectric micro-motor actuated by asymmetrical inertial impact driving principle [J]. **Review of Scientific Instruments**, 2014, 85(3): 1091-1099.
- [10] WEN J, MA J, ZENG P, et al. A new inertial piezoelectric rotary actuator based on changing the normal pressure [J]. **Microsystem technologies**, 2013, 19(2): 277-283.
- [11] XIAOTAO L, ZHIGANG Y, JIANFANG L. Research on a Piezoelectric Actuator Based on the Match of Impact and Friction [C]//Computing, Communication, Control, and Management (CCCM) 2009. Sanya: [s. n.], 2009: 435-438.
- [12] BENDER C M, HOLM D D, HOOK D W. Complex trajectories of a simple pendulum [J]. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, 2007, 40(3): F81.
- [13] KLADIVOVA M, MUCHA L. Physical pendulum—a simple experiment can give comprehensive information about a rigid body [J]. **European Journal of Physics**, 2014, 35(2): 274.
- [14] DE-SHENG X, ZHAO Z, MEI-ZHEN G. Accurate period approximation for any simple pendulum amplitude [J]. **Chinese Physics Letters**, 2012, 29(4): 1-15.
- [15] CARVALHAES C G, SUPPES P. Approximations for the period of the simple pendulum based on the arithmetic-geometric mean [J]. **American Journal of Physics**, 2008, 76(12): 1150-1154.
- [16] QURESHI M I, RAFAT M, AZAD S I. The exact equation of motion of a simple pendulum of arbitrary amplitude: a hypergeometric approach [J]. **European Journal of Physics**, 2010, 31(6): 1485.
- [17] THOMTON S T, GIAMBATTISTA B, GRIFFITH W, et al. Student Solutions's Manual to Accompany Classical Dynamics of Particles and Systems, Marion, Thornton [M]. Gerogia: Saunders College, 1995.
- [18] LIMA F M S, ARUN P. An accurate formula for the period of a simple pendulum oscillating beyond the small angle regime [J]. **American journal of physics**, 2006, 74(10): 892-895.

[编辑:张 豪]

本文引用格式:

程光明,胡意立,李晓旭,等.非对称结构单摆的理论与试验研究[J].机电工程,2015,32(3):301-306.

CHENG Guang-ming, HU Yi-li, LI Xiao-xu, et al. Theoretical and experimental research of asymmetric single pendulum [J]. *Journal of Mechanical & Electrical Engineering*, 2015, 32(3): 301-306.《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>