

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2015.11.003

移动副驱动的 Delta 机构工作空间 分析及机构优化研究*

钟 琪, 刘贵杰*, 王安忆, 翟元壮
(中国海洋大学 工程学院, 山东 青岛 266100)

摘要:针对在给定的设计要求下,确定移动副驱动的 Delta 机构的最优结构参数的问题,对该机构的约束方程、位置正解反解、工作空间、机构的雅克比矩阵等方面进行了研究。在机构的结构分析的基础上,采用了解析法和搜索法对工作空间进行了研究,并取工作空间的内切圆柱体作为设计空间,推导出了工作空间的度量参数与结构参数的关系。然后通过支链矢量图推导出了该机构的雅克比矩阵,获得了该矩阵的条件数的分布情况,并通过取条件数在工作空间的积分来评价机构的操作性能。最后在给定设计要求下,通过进行机构优化确定了最优的结构参数。研究结果表明,可利用工作空间度量参数和雅克比矩阵的条件数积分进行机构优化以满足对该机构工作空间和操作性能的设计要求。

关键词:Delta 并联机构;工作空间;雅克比矩阵;机构优化

中图分类号:TH112;TP24

文献标志码:A

文章编号:1001-4551(2015)11-1407-06

Workspace resolution and mechanism optimization on delta parallel mechanism driven by prismatic pair

ZHONG Qi, LIU Gui-jie, WANG An-yi, ZHAI Yuan-zhuang
(College of Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

Abstract: Aiming at determining the optimal structure parameters of Delta parallel mechanism driven by prismatic pair to meet the design requirements, the constraint equations, the reverse and positive solution equation of positions, the workspace and the Jacobi matrix of the mechanism were studied. On the basis of the analysis of the structure, the workspace resolution was done by analytical method and search method. The inscribed circle cylinder of the workspace is seen as a design space and its measurement parameters that have relationship with structural parameters were deduced. Then the Jacobi matrix was deduced by vector diagram of branch chain. The distribution of the condition number of the matrix was obtained. The integral of the condition number in the workspace was obtained to evaluate operating performance. Finally the mechanism optimization was done to determine the optimal structure. The results indicate that the mechanism can meet the design requirement by the mechanism optimization that use the condition number and the measurement parameters of the workspace.

Key words: Delta parallel mechanism; workspace; Jacobi matrix; mechanism optimization

0 引 言

随着工业的发展,各种并联机构不断被设计出来并应用于多个领域。其中,Delta 并联机构是在 1985 年法国 Reymond Clavel 教授设计出的一款新型并联机构,根据机构动静平台呈三角形而命名为 Delta 机

构^[1]。Delta 并联机构只有 3 个移动自由度,具有工作空间大、正解运动学简单、定位精度高等特点。通过运动副衍变可以得到移动副驱动的 Delta 机构。该并联机构在并联式 3D 打印机产品中获得了广泛的应用。同时,该类型 3D 打印机以价格低廉、结构简单等特点已占据了部分市场。为此,对 3P-Delta 并联机构进行

收稿日期:2015-06-24

基金项目:国家自然科学基金资助项目(3009000-911221610)

作者简介:钟 琪(1993-),男,江西赣州人,主要从事增材制造及 3D 打印方面的研究。E-mail:zq1793@163.com

通信联系人:刘贵杰,男,教授,硕士生导师。E-mail:liuguijie039@163.com

详尽的研究具有现实意义。

为满足该并联机构的具体设计要求,本研究对该机构进行了详尽的运动学分析。其中,关键问题是工作空间分析和机构优化。工作空间分析的方法是解析法和搜索法。在工作空间分析基础上,笔者取其内切圆柱体为设计空间并推导出其度量参数公式。当工作空间满足要求时,机构的操作性能还应达到设计要求。因此,本研究提出以雅克比矩阵的条件数积分和工作空间高度作为目标函数的机构优化思路。

1 并联机构的结构分析

典型的 Delta 机构的输入驱动为 3 个转动副。当转动副的转动半径趋于无穷大时,转动副会衍变为移动副,即得到移动副驱动的 Delta 机构,该机构如图 1 所示。根据衍变关系,本研究将该机构命名为 3P-Delta 机构。

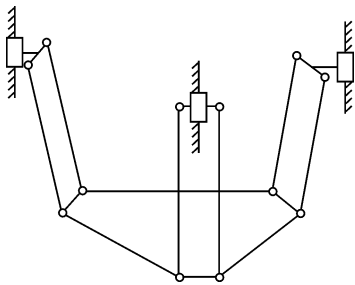


图 1 3P-Delta 机构

3P-Delta 机构由动平台、静平台和 3 条完全相同的支链组成,利用 3 条支链来连接动静平台,结构如图 2 所示。单个运动支链是由 4 个球铰与杆件构成的平行四边形闭环,该闭环一条边与驱动滑块相连,一条边与动平台相连。3 组平行四边形闭环确保了动平台与静平台的平行,消除了动平台的转动自由度,而保留了 3 个移动自由度^[2]。

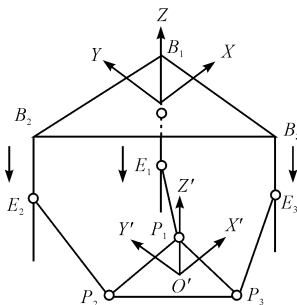


图 2 机构简图

根据机构学理论,该机构自由度 \$F\$ 可以利用 Kutzbach-Grübler 公式计算得到,如下:

$$F = 6(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i \quad (1)$$

式中: \$n\$—运动构件数目, \$g\$—运动副数目, \$f_i\$—第 \$i\$ 运动副具有的自由度数。

计算自由度时应将 4 个球铰中的两个按虎克铰考虑以消除连杆绕自轴转动的局部自由度。运动构件数目 \$n=11\$, 运动副数目 \$g=15\$, 移动副有一个自由度, 虎克铰有两个自由度, 球铰有 3 个自由度。将其代入式 (1) 可得到该机构的自由度数 \$F=3\$。

由于闭环结构消除了转动自由度, 该并联机构具有 3 个移动自由度, 即动平台能在三维空间中实现平动。

2 机构的约束方程

机构简图如图 2 所示。本研究在该机构上建立两个坐标系。其中, 静坐标系 \$O-XYZ\$ 原点固定在静平台的几何中心, 动坐标系 \$O'-X'Y'Z'\$ 原点固定在动平台的几何中心, 其中 \$Z\$ 轴和 \$Z'\$ 轴分别垂直于静平台和动平台。\$Y\$ 轴和 \$Y'\$ 轴分别垂直于 \$B_1B_2\$ 和 \$P_1P_2\$。

从动杆是图中的 \$E_iP_i\$, 长度记为 \$L_a\$。移动副滑动的距离是为图中的 \$B_iE_i\$, 长度记为 \$-\lambda_i\$。静平台外接圆半径 \$|OB_i|=R\$, 动平台外接圆半径 \$|O'P_i|=r\$, 矢量 \$OB_i\$ 与 \$X\$ 轴的夹角记为 \$\eta_i\$。

设在坐标系 \$O-XYZ\$ 中矢量 \$\overrightarrow{OO'} = [x \ y \ z]^T\$。

根据 \$|P_iE_i|=L_a\$, 可推导出机构的约束方程。记 \$R_1=R-r\$, 机构的约束方程可化简为:

$$(x - R_1 \cos \eta_i)^2 + (y - R_1 \sin \eta_i)^2 + (z - \lambda_i)^2 = L_a^2, (i=1, 2, 3) \quad (2)$$

式中: \$\eta_i = (4i-3)\pi/6, (i=1, 2, 3)\$。

可看出该并联机构的主要结构参数为从动杆长 \$L_a\$ 和动静平台半径差 \$R_1\$。

3 位置反解及正解

机构约束方程可视为关于 \$\lambda_i\$ 的一元二次方程:

$$(\lambda_i - U_i)^2 = V_i \quad (3)$$

式中: \$U_i = z, V_i = L_a^2 - (x - R_1 \cos \eta_i)^2 - (y - R_1 \sin \eta_i)^2\$。

可见 \$U_i, V_i\$ 均为已知量, 求解上述方程, 可得:

$$\lambda_i = U_i \pm \sqrt{V_i}, (i=1, 2, 3) \quad (4)$$

式 (4) 即是该机构的位置反解公式, 即给定动平台的位置, 可求出驱动滑块的位移。

并联机构的特点是所有分支机构同时接受驱动器输入, 而最终共同给出输出。因此, 对正解而言, 该机构的约束方程为一个含有 3 个未知数, 3 个非线性方程的方程组。由于方程组的复杂性, 其位置正解的求解极其复杂, 甚至无法得到解析解。但由于 3P-Delta 机构的机构约束方程较简单, 研究者可利用 Matlab 软

件求解出该机构的正解公式。

4 工作空间分析

工作空间是评价机构性能的重要指标之一。在实际结构中,并联机构工作空间的大小和形状受到限制的因素有:运动副活动空间的限制;约束机构的限制;奇异位置;连杆之间的相互干涉。本研究采用解析法和搜索法两种方法进行该机构的工作空间分析。

4.1 解析法

在解析法中,先不考虑运动副活动空间的限制,那么主要的约束条件是机构的约束方程。

将机构约束方程式(2)进行变形,可得:

$$(x - R_1 \cos \eta_i)^2 + (y - R_1 \sin \eta_i)^2 - L_a^2 = -(z - \lambda_i)^2 \leq 0$$

即:

$$(x - R_1 \cos \eta_i)^2 + (y - R_1 \sin \eta_i)^2 - L_a^2 \leq 0 \quad (5)$$

其中:一个不等式表示单运动支链约束的空间区域是一个长度无限的圆柱体区域。该圆柱体的轴线方

程为 $\begin{cases} x = R_1 \cos \eta_i \\ y = R_1 \sin \eta_i \end{cases}$, 圆柱体半径为 L_a 。

该机构有 3 条运动支链,则运动空间是 3 个圆柱体相交的公共区域——曲面三棱柱,工作空间三维示意图如图 3 所示。

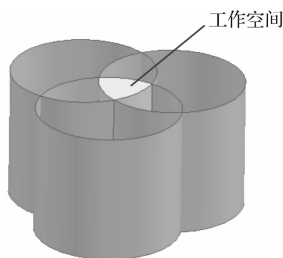


图 3 工作空间三维示意图

曲面三棱柱是该并联机构的可达空间。该区域是一个不规则的形状,不便于采用参数来描述。为方便实际应用和衡量,本研究取该区域的内切圆柱作为该机构的设计空间。

可推导出该内切圆柱体的半径为:

$$r_1 = L_a - R_1 = L_a - R + r \quad (6)$$

再考虑球铰摆动角度的限制,设球铰最大摆动角度为 α , $\vec{A}_i = [\sin \eta_i \quad -\cos \eta_i \quad 0]^T$, 则矢量 $\vec{P}_i \vec{E}_i$ 和矢量 $\vec{A}_i$ 的夹角变化范围是 $90^\circ \pm \alpha$, 则有不等式:

$$|\cos[\vec{P}_i \vec{E}_i, \vec{A}_i]| \leq \sin \alpha \quad (7)$$

即为:

$$|x \sin \eta_i - y \cos \eta_i| \leq L_a \sin \alpha \quad (8)$$

其中一个不等式表示单支链的球铰摆角约束的空间,是两条平行直线的内侧区域,直线斜率 $K_i = \tan \eta_i$ 。

则球铰约束的工作空间如图 4 所示。

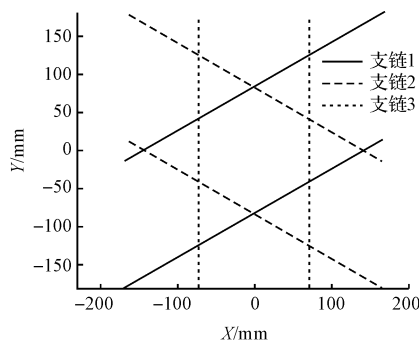


图 4 受球铰约束的工作空间

可看出受球铰约束的工作空间为六棱柱体,其内切圆柱体的半径为:

$$r_2 = L_a \sin(\alpha) \quad (9)$$

该公式说明在一定范围内工作空间的内切圆柱体半径只和从动杆杆长有关,与动静平台半径无关。

综上,内切圆柱体的半径应为:

$$r_0 = \min \{ r_1 \quad r_2 \} \quad (10)$$

4.2 搜索法

在实际结构中,该机构的工作空间还受导轨长度限制。研究者可采用圆柱坐标搜索法寻找工作区域的边界。本研究采用 Matlab 软件编写搜索程序,其搜索框图如图 5 所示。

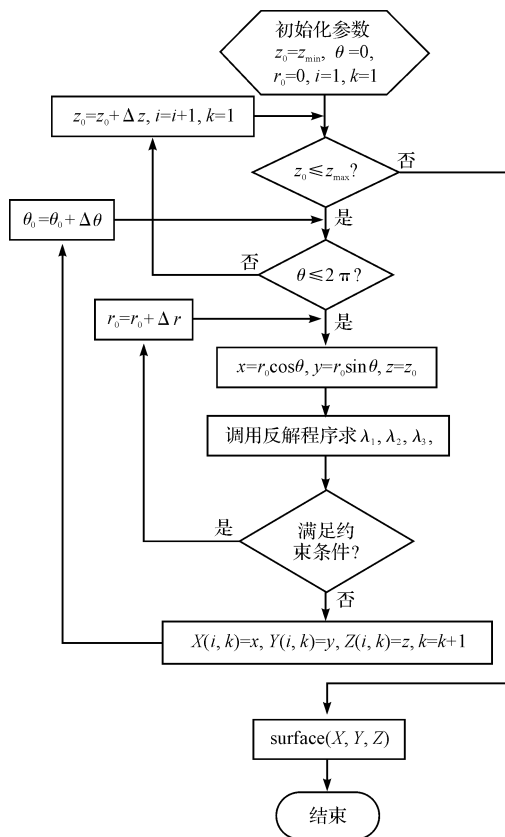


图 5 工作空间搜索框图

该搜索程序的核心是反解公式和约束条件。其中,已经得到了反解公式。约束条件主要应考虑的是导轨长度和球铰转动角度的限制。分析可得,导轨长度限制了工作空间在垂直方向上的延伸;而球铰摆动角度限制了工作空间在水平面上的延伸。

先不考虑球铰摆动角度的限制,仅考虑导轨长度的限制,则应满足:

$$\min \{ \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \} \geq -L \quad \max \{ \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \} \leq 0 \quad (11)$$

Matlab 程序搜索得到的工作空间如图 6 所示。

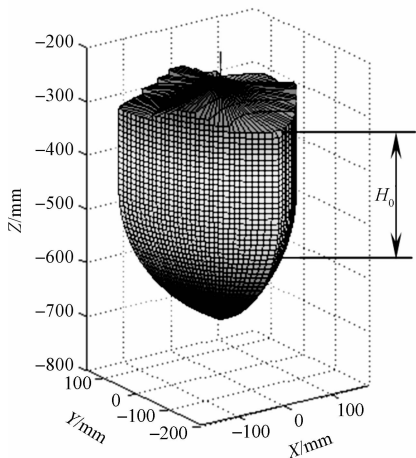


图 6 受导轨限制后的工作空间

由于导轨的限制,工作空间是上下端有变形的曲面三棱柱,和解析法结论一致。其中,上端变形很陡,下端变形较缓。

设导轨长度为 L , 曲面三棱柱的 3 个侧面均是圆柱面,其半径为杆长 L_a , 即连杆处于水平位置。因此,当机构从侧面运动至开始变形的边界位置时,至少有一个连杆处于水平位置。可根据边界位置推导出未因导轨限制而变形的工作空间高度:

$$H_0 = L - \sqrt{L_a^2 - \left(\frac{3}{2}R_1 - \sqrt{L_a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}R_1}{2} \right)^2} \right)^2} \quad (12)$$

由于下端变形较缓,在允许误差值为 δ 的空间变形的情况下,下端增加的工作空间高度为:

$$\Delta H = \sqrt{L_a^2 - [(1-\delta)(L_a - R_1) + R_1]^2} \quad (13)$$

因此,总工作空间高度为:

$$H = H_0 + \Delta H \quad (14)$$

再考虑球铰转动角度的限制,搜索得到的工作空间如图 7 所示。可看出工作空间是上下端有变形的六棱柱,和解析法结论一致。

综上,内切圆柱体半径 r_0 和工作空间高度 H 可作为度量参数来描述工作空间的大小。

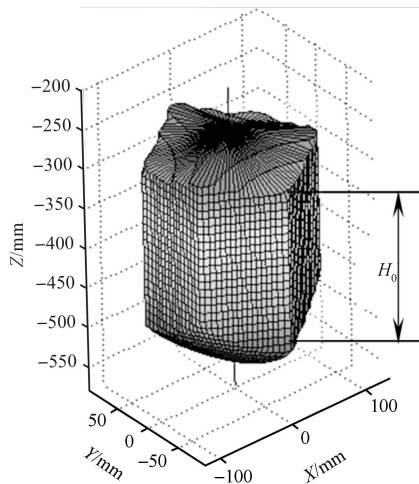


图 7 同时受到导轨和球铰限制的工作空间

5 机构的雅克比矩阵

5.1 机构的雅克比矩阵

速度正解公式:

$$\dot{x} = J(q) \dot{q} \quad (15)$$

式中: $\dot{x}$ —操作速度; $\dot{q}$ —关节速度; $J(q)$ — $6 \times n$ 的矩阵,称为机构的雅可比矩阵,可通过支链矢量图推导出来,支链矢量图如图 8 所示。

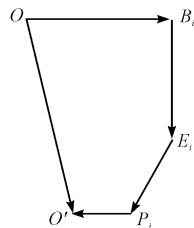


图 8 支链矢量图

设在坐标系 $O-XYZ$ 中矢量 $\overrightarrow{OO'} = [x \quad y \quad z]^T$, 可得到雅克比矩阵为:

$$J = - \begin{bmatrix} S_1^T \\ S_2^T \\ S_3^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_1^T b_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2^T b_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3^T b_3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\text{其中, } S_i = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - {}^0_i R \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_i \end{bmatrix} \quad b_i = - {}^0_i R \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_i R = \begin{bmatrix} \cos \eta_i & -\sin \eta_i & 0 \\ \sin \eta_i & \cos \eta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$$

5.2 雅克比矩阵的条件数

通常将雅克比矩阵的条件数作为机构操作性能的指标,称为机构的灵活度。条件数的定义为:

$$\text{cond}(J) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \quad (17)$$

式中: $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ —矩阵 $J^T J$ 的最大和最小特征值。条件数的值越小,即趋近于 1,机构的操作性能越好。可得到条件数在工作区域截面上的分布情况如图 9 所示。

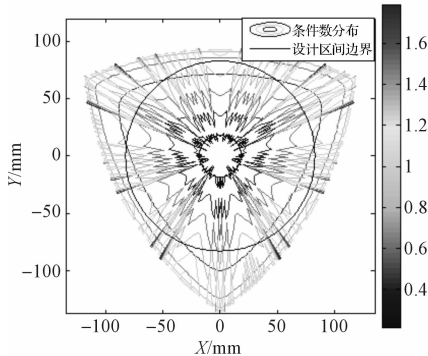


图 9 条件数的对数等高线图

由于矩阵运算的特点和计算误差,条件数的分布有小幅的波动。由图 9 可知,条件数在中心区域有最小值,边界处有最大值,即机构在中心区域操作性能较好。

6 机构优化

本研究以雅克比矩阵的条件数在给定工作空间的平均数来评价机构的操作性能^[3],即:

$$F(J) = \frac{\iiint_w \text{cond}(J) dw}{\iiint_w dw} \quad (18)$$

在本次设计中,设计空间 w 为一个圆柱体,而且条件数在每个截面上的分布都一致。因此,可将积分区域简化,即:

$$F(J) = \frac{\iint_w \text{cond}(J) dw}{\iint_w dw} \quad (19)$$

式中: w —设计空间的水平截面,即圆域。

为方便积分,本研究将 J 中的坐标 (x, y) 变换为极坐标 (R, θ) ,有如下关系:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases}$$

上述积分转化为:

$$G(J) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \text{cond}(J) R dR \quad (20)$$

本研究选定球铰,即最大摆动角度确定,取 16° 。由式(9~10),当 $r_2 < r_1$ 时,工作空间的内切圆半径只和最大摆角与从动杆长有关。选定杆长 $L_a = 300$ mm,则积分区域确定,半径为 82.7 mm。此时,可取积分 $G(J)$ 来评价机构的操作性能。

优化变量为动静平台半径差 R_1 ,取优化区间为 $[140, 220]$ 。导轨长度取为 450 mm,可得到积分 $G(J)$ 和工作空间高度 H_0 变化趋势,机构优化曲线如图 10 所示。

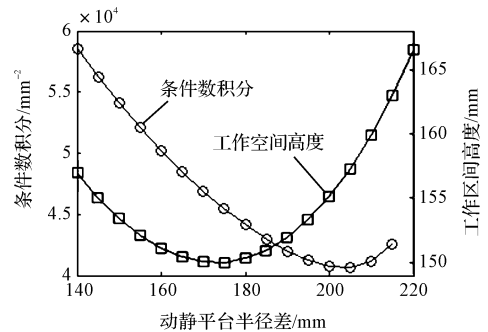


图 10 机构优化曲线

由图 10 可知,机构的条件数积分起初随平台半径差增大而减小,而当可达空间接近积分区域时,条件数积分开始增大。工作区间高度的变化曲线出现了极小值。综合考虑,选取平台的半径差 $R_1 = 205$ mm。

因此,当选定最大摆角为 16° 的球铰并要求工作空间半径为 82.7 mm 时,最优的结构参数可确定为:杆长 $L_a = 300$ mm、平台的半径差 $R_1 = 205$ mm。

7 结束语

本研究明确了移动副驱动的 Delta 机构的主要结构参数是从动杆长 L_a 和平台半径差 R_1 。根据分析,实际工作空间还受导轨长度和球铰摆动角度的限制。为量化工作空间的大小,本研究取工作空间的内接圆柱体作为设计空间,并推导出工作空间的度量参数:半径 r_0 、高度 H 。为满足对操作性能和工作空间的设计要求,笔者提出了以雅克比矩阵的条件数积分和工作空间高度 H_0 为目标函数进行该机构的优化设计的思路。

(下转第 1427 页)

本文引用格式:

钟 琪,刘贵杰,王安忆,等. 移动副驱动的 Delta 机构工作空间分析及机构优化研究[J]. 机电工程,2015,32(11):1407-1411,1427.

ZHONG Qi, LIU Gui-jie, WANG An-yi, et al. Workspace resolution and mechanism optimization on delta parallel mechanism driven by prismatic pair[J].

Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2015,32(11):1407-1411,1427.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>