

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2021.03.008

考虑轴向变形的谐波减速器柔轮中面位移计算^{*}

赵 彬, 范元勋^{*}

(南京理工大学 机械工程学院, 江苏 南京 210000)

摘要:针对谐波减速器中柔轮变形情况复杂, 缺乏整体位移的有效计算手段的问题, 对考虑轴向变形的柔轮筒体中面上各点的位移计算方法进行了研究, 提出了用一圈径向线载荷等效波发生器对柔轮筒体作用力的模型简化方法。利用 Green 函数构建了位移函数表达式, 根据柔轮筒体的两端边界条件、内力连续性条件和受载荷处剪力突变条件, 得到了位移函数中的待定系数; 在柔轮筒体和筒底重合边的位移协调约束下, 对待定系数进行了修正; 根据有限元仿真计算结果, 分别提取了柔轮筒体中面上点的各方向位移分量; 最后, 结合理论计算结果对该方法加以验证。研究结果表明: 位移理论计算结果的分布规律与其有限元结果基本一致, 最大幅值误差为 6.7%; 该方法能够快速且有效地计算柔轮筒体的变形。

关键词:谐波减速器; 柔轮; 中面位移; 有限元分析

中图分类号: TH132.46

文献标识码: A

文章编号: 1001-4551(2021)03-0319-07

Calculation of displacement of neutral layer of flexspline in harmonic reducer considering axial deformation

ZHAO Bin, FAN Yuan-xun

(School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210000, China)

Abstract: Aiming at the problem of complicated deformation of flexspline in harmonic reducer and lack of accurate displacement calculation method, the calculation method of displacement of each point on the neutral layer of the flexspline considering the axial deformation was studied. A method to simplify the force model of the flexspline with a circle of radial load was proposed. The displacement function expression was constructed through the Green function. The undetermined coefficients in the displacement function were solved by the boundary conditions at both ends of the cylinder, the continuous condition of the internal force and the mutation of shear force at the load. The undetermined coefficients were corrected according to the displacement coordination of the cylinder and its bottom. According to the finite element simulation calculation results, the displacement components of the points on the neutral layer of the flexspline cylinder in various directions were extracted, and the theoretical calculation results were verified. The results indicate that the distribution of the theoretical calculation results of displacement is basically consistent with the finite element results, and the maximum amplitude error is 6.7%. This method can quickly and effectively calculate the deformation of the flexspline.

Key words: harmonic reducer; flexspline; displacement of the neutral layer; finite element analysis

0 引 言

随着计算机科学、仿生学、人工智能等学科的进

步, 机器人技术如今正处于蓬勃发展的阶段。作为机器人的核心部件, 精密减速器占整机的三分之一以上^[1], 谐波减速器因其大传动比、高精度、小体积等优点受到了广泛的关注与研究。比如日本的 ASIMO 机

收稿日期: 2020-07-22

基金项目: 航天一院高校联合创新基金资助项目(CALT201512)

作者简介: 赵彬(1996-), 男, 江苏常州人, 硕士研究生, 主要从事机械设计及理论方面的研究。E-mail: 943055476@qq.com

通信联系人: 范元勋, 男, 教授, 硕士生导师。E-mail: fanyx@mail.njust.edu.cn

器人有 20 多个关节采用了谐波减速器, WABIAN-2 机器人的所有关节全部采用了谐波减速器进行传动^[2]。

在谐波减速器中, 柔轮筒体受波发生器强迫变形后与刚轮进行啮合传动, 随着波发生器的旋转, 柔轮筒体上产生与旋转周期相对应的交变应力。因此, 相较于其他零件, 柔轮极易遭到破坏, 极大地影响到谐波减速器的性能。目前, 柔轮的应力状况受到了研究人员的广泛关注。根据弹性力学知识, 只需求得筒体的位移, 则其应力也将迎刃而解。但由于柔轮变形的复杂性, 柔轮筒体上各点的位移往往难以有较为准确的计算方法。

李秋芳^[3]用一对方向相反的径向集中力代替波发生器进行了柔轮的变形力计算, 这与实际的接触方式有较大差异, 得到的径向变形力过大; 杨勇^[4]根据柔轮中线不伸长假定, 通过对柔轮中线变形前后的弧长积分表达式进行处理, 得到了中线上各点的位移转角; 邢静忠^[5]为减小现有的力学小变形假定下位移叠加产生的偏差, 对包角内的中面曲线采用了凸轮等距曲线来确定, 对包角外曲线利用曲率连续条件构造样条函数来表示; GRAVAGNO^[6]得到了柔轮中面与波发生器轮廓的运动误差表达式, 为计算柔轮筒体中面提供了一种思路; MAHANTO B S 等人^[7]用有限元软件分析了不同波发生器对柔轮的装配应力的影响; 阳培^[8]通过有限元仿真方法, 对柔轮初始变形力与各个参数的关系进行了数值化分析与曲线拟合, 有限元软件虽然能较好地反映柔轮的变形的情况, 但难以得出各参数对变形的解析结果, 只能为每一个模型单独进行建模分析; MA^[9]设计了一种用激光位移传感器来测量柔轮筒体径向位移的装置, 分析了转速对形变的影响, 为柔轮变形理论提供了实验依据。

上述的理论研究中, 大多是将柔轮筒体的变形问题当作平面问题来处理, 而忽略了筒体沿轴向的位移变化; 因此, 这种研究结果和柔轮的实际变形必然有着较大的差别。

通过查阅文献和多次的有限元研究结果发现, 波发生器与柔轮筒体的接触是一圈很窄的环形范围, 相较于一对集中力, 一圈径向线载荷能更加适合地来体现波发生器对柔轮筒体的作用力。因此, 本文用一圈径向线载模拟波发生器对柔轮的作用, 对柔轮中面的位移进行计算, 并通过有限元来验证理论计算结果的正确性。

1 柔轮变形模型的建立

由于柔轮齿圈的存在使得直接建立柔轮模型特别复杂, 考虑到柔轮筒壁厚远小于筒体半径, 笔者将柔轮筒体简化为一个薄壁圆柱壳, 用一圈线载荷来模拟波发生器对柔轮筒体的作用, 进行接下来的分析。

柔轮受力模型简化图如图 1 所示。

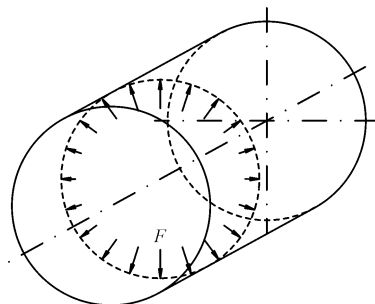


图 1 柔轮受力模型简化图

笔者摒弃了以往研究中令中面各向应变为 0 的小变形设想, 做出如下假设:

- (1) 不考虑加工工艺对柔轮材料的影响, 将柔轮视为各向同性体;
- (2) 波发生器与柔轮的接触视为一圈线接触, 边界位于波发生器最深入柔轮的一侧;
- (3) 柔轮筒体在变形过程中其壁厚不发生改变。

笔者将圆柱壳放在曲线坐标系 $\alpha\beta\gamma$ 中, 把 α 坐标放在柱面母线方向; β 坐标放在准线方向, γ 坐标放在径向。中面沿 α 方向曲率 $k_1 = 0$; 中面沿 β 方向曲率 $k_2 = 1/R$, 其中, R 为柔轮筒体中面半径。

将 α 为常量的横截面记作 α 面, 将 β 为常量的横截面记作 β 面, 中面横截面上的内力如图 2 所示。

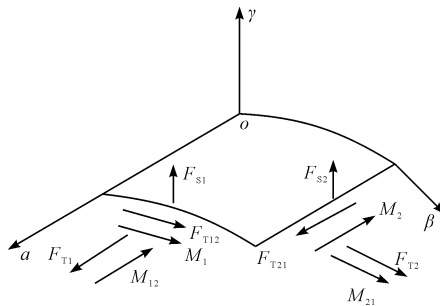


图 2 筒体中面横截面内力图

F_{T1} — α 面上单位长度拉压力; F_{T2} — β 面上单位长度拉压力; F_{T12} — α 面上单位长度平错力; F_{T21} — β 面上单位长度平错力; M_1 — α 面上单位长度弯矩; M_2 — β 面上单位长度弯矩; M_{12} — α 面上单位长度扭矩; M_{21} — β 面上单位长度扭矩; F_{S1} — α 面上单位长度横向剪力; F_{S2} — β 面上单位长度横向剪力

根据弹性力学知识,不难得到柱壳中面的平衡微分方程和弹性方程^[10]。

其中,微分方程为:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) u + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = -\frac{1-\mu^2}{Eb} q_1 \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) v + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \beta} = -\frac{1-\mu^2}{Eb} q_2 \\ \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R^2} + \frac{b^2}{12} \nabla^4 w = \frac{1-\mu^2}{Eb} q_3 \end{cases} \quad (1)$$

式中: u, v, w —弹性体内任意一点分别沿 α, β, γ 的位移分量; μ —柔轮材料的泊松比; E —柔轮材料的弹性模量; b —柔轮筒体壁厚; q_1, q_2, q_3 —柱壳分别沿 α (纵向)、 β (环向)、 γ (径向) 所受的载荷分量。

弹性方程为:

$$\begin{cases} F_{T1} = \frac{Eb}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} \right) \right] \\ F_{T2} = \frac{Eb}{1-\mu^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R} \right) + \mu \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right] \\ F_{T12} = F_{T21} = \frac{Eb}{2(1+\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \\ M_1 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) \\ M_2 = -D \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) \\ M_{12} = M_{21} = -(1-\mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \\ F_{S1} = -D \frac{\partial}{\partial \beta} \nabla^2 w \\ F_{S2} = -D \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^2 w \end{cases} \quad (2)$$

式中: D —薄壳的弯曲刚度, $D = Eb^3/12(1-\mu^2)$ 。

边界条件可以分为位移边界条件和内力边界条件,笔者主要考虑圆柱壳的 α 面的边界条件。位移边界条件包含 u, v, w 和中面法线绕 β 坐标线的转角 $\partial w/\partial \alpha$; 内力边界条件包含 F_{T1}, M_1 、总剪力 F_{S1}^l 和总平错力 F_{T12}^l , 其中: $F_{S1}^l = F_{S1} + \partial M_{12}/\partial \beta$, $F_{T12}^l = F_{T12} + k_2 M_{12}$ 。

对于柔轮变形问题,柔轮所受的载荷主要是径向载荷,在式中令 $q_1 = q_2 = 0$; 同时,为方便计算,引入位移函数 $F = F(\alpha, \beta)$, 把中面位移表示成为:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \mu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) F \\ v = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (2+\mu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) F \\ w = R \nabla^4 F \end{cases} \quad (3)$$

则式中的前两个方程总能满足,第3个方程则变为:

$$\nabla^8 F + \frac{Eb}{R^2 D} \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} = \frac{q_3}{RD} \quad (4)$$

再将该式代入弹性方程中,得到用位移函数 F 表示的内力表达式:

$$\begin{cases} F_{T1} = Eb \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \\ F_{T2} = Eb \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} \\ F_{T12} = -Eb \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^3 \partial \beta} \\ M_1 = -RD \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \nabla^4 F \\ M_2 = -RD \left(\mu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \nabla^4 F \\ M_{12} = -(1-\mu) D \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \nabla^4 F \\ F_{S1} = -RD \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^6 F \\ F_{S2} = -RD \frac{\partial}{\partial \beta} \nabla^6 F \end{cases} \quad (5)$$

因为柔轮筒底变形量很小,将其视为圆形薄板小挠度进行分析;将筒底放置在同一曲线坐标系 $\alpha\beta\gamma$ 中。筒底的各个内力如图3所示。

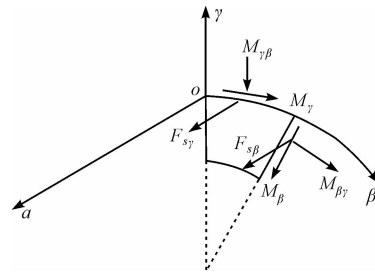


图3 柔轮筒底中面内力图

$$\begin{cases} M_\gamma = -D' \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \gamma^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} \right) \\ M_\beta = -D' \left(\mu \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} \right) \\ M_{\gamma\beta} = M_{\beta\gamma} = -D' (1-\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial \gamma \partial \beta} \\ F_{S\gamma} = -D' \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) U \\ F_{S\beta} = -D' \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) U \end{cases} \quad (6)$$

式中: U —柔轮筒底上各点沿 α 方向的位移函数; D' —柔轮筒底的弯曲刚度,计算方法和筒体的相同,只需要将厚度 b 替换成筒底厚度即可。

同样,有筒底的弹性曲面微分方程为:

$$D' \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) U = 0 \quad (7)$$

筒底的位移边界条件包含 U 和转角 $\partial U / \partial \gamma$; 内力边界条件包含 M_γ 总剪力 $F_{S_\gamma}^t$, 其中: $F_{S_\gamma}^t = F_{S_\gamma} + \partial M_{\gamma\beta} / \partial \beta$ 。

2 位移函数的求解

当圆柱壳受线载荷作用时, 径向载荷 q_3 仅作用在 $\alpha = \alpha_0$ 处, 而不再是普通问题中的连续函数, 所以在式 (7) 中引入 Dirac 函数 $\delta(\alpha - \alpha_0)$:

$$\nabla^8 F + \frac{Eb}{R^2 D} \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} = \frac{1}{RD} q_3 \delta(\alpha - \alpha_0) \quad (8)$$

对于方程不容易求得通解, 故笔者通过构造 Green 函数 $G(\alpha)$ 来求解。

考虑到柔轮的变形是轴对称的, 所以此处位移函数 F 是一个偶函数。设方程的解为:

$$F(\alpha, \beta) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sum_{n=1}^{\infty} G_n(\alpha) \delta(\alpha - \alpha_0) \cos\left(\frac{n}{R}\beta\right) d\alpha \quad (9)$$

式中: α_1 —筒体和筒底相交的边界; α_2 —筒体外口边界。

式 (9) 可以表示为:

$$F(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(\alpha, \alpha_0) \cos\left(\frac{n}{R}\beta\right) \quad (10)$$

Green 函数的定义为:

(1) $G_n(\alpha, \alpha_0)$ 在 $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ 中, 除 α_0 外的每一处都使 $F(\alpha, \beta)$ 满足 $\nabla^8 F + \frac{Eb}{R^2 D} \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} = 0$;

(2) $G_n(\alpha, \alpha_0)$ 在 $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ 中, 使 $F(\alpha, \beta)$ 满足所有的边界条件;

(3) $G_n(\alpha, \alpha_0)$ 是连续函数, 并且除 F_{S1}^t 外的边界条件都是连续函数, F_{S1}^t 在 $\alpha = \alpha_0$ 处不连续, 但满足 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{F_{S1}^t(\alpha_0 + \varepsilon, \beta) - F_{S1}^t(\alpha_0 - \varepsilon, \beta)\} = q_3$ 。

柔轮与椭圆波发生器的接触线载荷分布规律近似余弦分布^[11], 所以此处假设径向线载荷 $q_3 = q \cos(2\beta/R)$, 其中, q 为载荷峰值。

由于位移函数 $F(\alpha, \beta)$ 是级数形式, 此处把上式右侧也展开为级数形式, 可得到:

$$\begin{aligned} \nabla^8 F + \frac{Eb}{R^2 D} \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} = \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{n}{R}\beta\right) \cdot \int_0^{2\pi R} \frac{q}{RD} \cos\left(\frac{2}{R}\beta\right) \delta(\alpha - \alpha_0) \cos\left(\frac{n}{R}\beta\right) d\beta \right) \end{aligned} \quad (11)$$

将其代入到式左侧, 可得到:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{n^2}{R^2} \right)^4 + \frac{Eb}{R^2 D} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} \right] G_n(\alpha, \alpha_0) \cos\left(\frac{n}{R}\beta\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{n}{R}\beta\right) \cdot \int_0^{2\pi R} \frac{q}{RD} \cos\left(\frac{2}{R}\beta\right) \delta(\alpha - \alpha_0) \cos\left(\frac{n}{R}\beta\right) d\beta \right) \quad (12)$$

通过观察式, 分析其解应具有的形式后, 设 G_{1n} 为 $\alpha < \alpha_0$ 的 Green 函数, G_{2n} 为 $\alpha > \alpha_0$ 的 Green 函数, 其表达式如下:

$$\begin{cases} G_{1n} = i_{1n} \sinh(a_n \alpha) \sin(b_n \alpha) + i_{2n} \sinh(a_n \alpha) \cos(b_n \alpha) + \\ i_{3n} \cosh(a_n \alpha) \sin(b_n \alpha) + i_{4n} \cosh(a_n \alpha) \cos(b_n \alpha) + \\ i_{5n} \cosh(c_n \alpha) \sin(d_n \alpha) + i_{6n} \cosh(c_n \alpha) \cos(d_n \alpha) + \\ i_{7n} \cosh(c_n \alpha) \sin(d_n \alpha) + i_{8n} \cosh(c_n \alpha) \cos(d_n \alpha) \\ G_{2n} = j_{1n} \sinh(a_n \alpha) \sin(b_n \alpha) + j_{2n} \sinh(a_n \alpha) \cos(b_n \alpha) + \\ j_{3n} \cosh(a_n \alpha) \sin(b_n \alpha) + j_{4n} \cosh(a_n \alpha) \cos(b_n \alpha) + \\ j_{5n} \cosh(c_n \alpha) \sin(d_n \alpha) + j_{6n} \cosh(c_n \alpha) \cos(d_n \alpha) + \\ j_{7n} \cosh(c_n \alpha) \sin(d_n \alpha) + j_{8n} \cosh(c_n \alpha) \cos(d_n \alpha) \end{cases} \quad (13)$$

式中: a_n, b_n, c_n, d_n —已知系数, 是微分方程 $\left[\left(\frac{d^2}{d\alpha^2} - \frac{n^2}{R^2} \right)^4 + \frac{Eb}{R^2 D} \frac{d^4}{d\alpha^4} \right] G_n(\alpha, \alpha_0) = 0$ 的特征方程的 4 对复根 $a_n \pm ib_n, -a_n \pm ib_n, c_n \pm id_n, -c_n \pm id_n$ 各部的系数; $i_{1n}, i_{2n}, i_{3n}, i_{4n}, i_{5n}, i_{6n}, i_{7n}, i_{8n}$ — G_{1n} 的待定系数; $j_{1n}, j_{2n}, j_{3n}, j_{4n}, j_{5n}, j_{6n}, j_{7n}, j_{8n}$ — G_{2n} 的待定系数。

由此得到了与 G_{1n}, G_{2n} 相对应的位移函数 F_1 和 F_2 。根据 Green 函数的定义 (3) 和边界条件可以得到:

$$\begin{cases} Eb \frac{\partial^4 (F_2 - F_1)}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0 \\ \left(-Eb \frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \beta} - k_2 (1 - \mu) D \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \nabla^4 \right) (F_2 - F_1) \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0 \\ -RD \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \nabla^4 (F_2 - F_1) \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0 \\ \left(-RD \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^6 - (1 - \mu) D \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta^2} \nabla^4 \right) (F_2 - F_1) \Big|_{\alpha=\alpha_0} = q \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \mu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) (F_2 - F_1) \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (2 + \mu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) (F_2 - F_1) \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0 \\ R \nabla^4 (F_2 - F_1) \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0 \\ R \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^4 (F_2 - F_1) \Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

再考虑 α_1 和 α_2 两处的边界条件, 笔者将柔轮筒体的两端视为自由端, 则在边界上有:

$$\begin{cases}
 Eb \frac{\partial^4 F_1}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \Big|_{\alpha=\alpha_1} = 0 \\
 \left(-Eb \frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \beta} - k_2(1-\mu)D \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \nabla^4 \right) F_1 \Big|_{\alpha=\alpha_1} = 0 \\
 -RD \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \nabla^4 F_1 \Big|_{\alpha=\alpha_1} = 0 \\
 \left(-RD \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^6 - (1-\mu)D \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta^2} \nabla^4 \right) F_1 \Big|_{\alpha=\alpha_1} = 0 \\
 Eb \frac{\partial^4 F_2}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \Big|_{\alpha=\alpha_2} = 0 \\
 \left(-Eb \frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \beta} - k_2(1-\mu)D \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \nabla^4 \right) F_2 \Big|_{\alpha=\alpha_2} = 0 \\
 -RD \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \nabla^4 F_2 \Big|_{\alpha=\alpha_2} = 0 \\
 \left(-RD \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^6 - (1-\mu)D \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta^2} \nabla^4 \right) F_2 \Big|_{\alpha=\alpha_2} = 0
 \end{cases} \quad (15)$$

式(14,15)一共16个方程,用计算机编程联立求解出16个系数关于 q 的代数表达式,再利用 $\alpha = \alpha_0, \beta = 0$ 处的径向位移 w 等于理论设计的最大径向变形量这一条件,计算出 q 的值,将16个系数和 q 代入式(13)和式(10),就得到了位移函数 $F_1(\alpha, \beta)$ 和 $F_2(\alpha, \beta)$ 的初步结果。

从结果可以发现,当 $n \neq 2$ 时,式(12)左边恒为0,此时无论16个系数如何取值等式恒成立,所以仅当 $n = 2$ 时该计算有意义,可以用 $n = 2$ 时的位移函数代替整个级数,即 $F_1(\alpha, \beta) = G_{12}(\alpha) \cos(2\beta/R)$, $F_2(\alpha, \beta) = G_{22}(\alpha) \cos(2\beta/R)$ 。

因为 $\alpha = \alpha_1$ 的边界处壳体并不是完全自由的,该结果是初步结果,还需要进一步对它进行修正。

为保证柔轮筒底和筒体之间的位移协调,有 $u(\alpha, \beta)|_{\alpha=\alpha_1} = U(\gamma, \beta)|_{\gamma=\gamma_2}$,其中: γ_2 —筒底与筒体重合边所在位置的 γ 值。所以此处假设:

$$U(\gamma, \beta) = g(\gamma) \cos\left(\frac{2}{R}\beta\right) \quad (16)$$

式中: $g(\gamma)$ —关于 γ 的未知函数。

将式(16)代入式(7)得到一个关于 γ 的4阶微分方程,再根据4个边界条件 $U|_{\gamma=\gamma_1} = 0, \partial U/\partial \gamma|_{\gamma=\gamma_1} = 0, U|_{\gamma=\gamma_2} = u|_{\alpha=\alpha_1}, \partial U/\partial \gamma|_{\gamma=\gamma_2} = \partial u/\partial \alpha|_{\alpha=\alpha_1}$ 就能计算出 $U(\gamma, \beta)$ 的表达式。

其中: γ_1 —筒底固定处的 γ 值。然后将 $U(\gamma, \beta)$ 代入式并计算出 M_γ 和 $F_{S\gamma}^t$,将 $F_{S\gamma}^t$ 和 M_γ 作为式新的内力边界条件分别代入,求解出筒体新的位移函数,然后重复上面的步骤反复迭代,直到两次的位移函数迭代精度 10^{-6} 为止。

3 实例计算

为验证本文提出的计算模型的准确性,笔者在ABAQUS中以波数为2的谐波减速器柔轮进行变形的有限元仿真分析。

柔轮的结构及相关参数如图4所示。

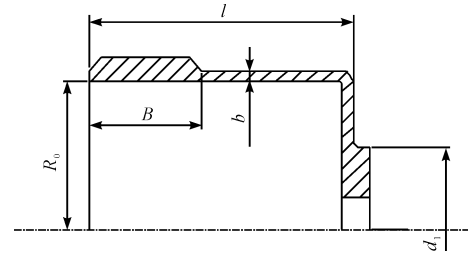


图4 柔轮结构及参数图

R_0 —筒体内径,为36 mm; B —波发生器宽度,为13 mm; b —壁厚,为0.65 mm; d_1 —筒底法兰外径,为46 mm; l —筒长,为72 mm。

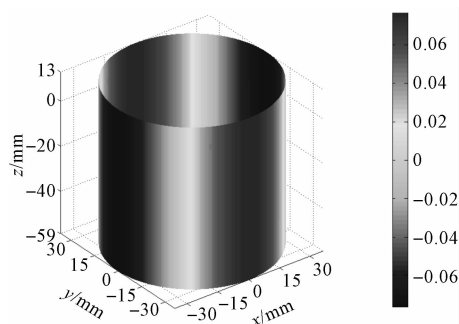
柔轮材料弹性模量 E 取209 000 MPa;泊松比 μ 取0.3;波发生器设置为刚体,网格类型为C3D20。

令柔轮筒体中面半径 $R = R_0 + b/2$,将上述相关参数代入式中,得到假设的Green函数 G_{1n} 与 G_{2n} ;然后将其代入式(14,15)中进行待定系数的求解。其中,为方便计算,将一圈径向线载荷作用位置 α_0 放置在 $\alpha = 0$ 处,根据筒体总长度 $l = 72$ mm,波发生器宽度 $B = 13$ mm,则相应地得到 α 方向的边界分别为 $\alpha_1 = -59$ 和 $\alpha_2 = 13$ 。

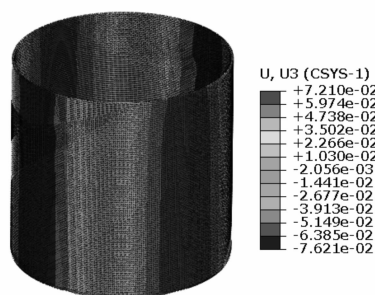
在后续的迭代过程中,杯底的边界分别为 $\gamma_1 = d_1/2, \gamma_2 = R$ 。由此可得到理论计算的位移函数为:

$$\begin{cases}
 F_1 = \cos(0.055\beta) \left(-0.00225 \sinh(0.27\alpha) \sin(-0.26\alpha) - \right. \\
 \quad 0.00158 \sinh(0.27\alpha) \cos(-0.26\alpha) - \\
 \quad 0.00225 \cosh(0.27\alpha) \sin(-0.26\alpha) - \\
 \quad 0.00158 \cosh(0.27\alpha) \cos(-0.26\alpha) - \\
 \quad 72.779 \cosh(0.0058\alpha) \sin(0.0056\alpha) + \\
 \quad 2515.9 \cosh(0.0058\alpha) \cos(0.0056\alpha) + \\
 \quad 1869.1 \cosh(0.0058\alpha) \sin(0.0056\alpha) + \\
 \quad \left. 1494.6 \cosh(0.0058\alpha) \cos(0.0056\alpha) \right) \\
 \quad (-59 \leq \alpha < 0, 0 \leq \beta \leq 2\pi) \\
 F_2 = \cos(0.055\beta) \left(-0.00225 \sinh(0.27\alpha) \sin(-0.26\alpha) + \right. \\
 \quad 0.00175 \sinh(0.27\alpha) \cos(-0.26\alpha) + \\
 \quad 0.00189 \cosh(0.27\alpha) \sin(-0.26\alpha) - \\
 \quad 0.00158 \cosh(0.27\alpha) \cos(-0.26\alpha) - \\
 \quad 72.779 \cosh(0.0058\alpha) \sin(0.0056\alpha) + \\
 \quad 2151.9 \cosh(0.0058\alpha) \cos(0.0056\alpha) + \\
 \quad 2249.3 \cosh(0.0058\alpha) \sin(0.0056\alpha) + \\
 \quad \left. 1494.6 \cosh(0.0058\alpha) \cos(0.0056\alpha) \right) \\
 \quad (0 \leq \alpha \leq 13, 0 \leq \beta \leq 2\pi)
 \end{cases} \quad (17)$$

将柔轮筒体的 u 、 v 、 w 3 个方向位移的理论结果和有限元结果分别进行比较,分别如图(5 ~ 7) 所示。

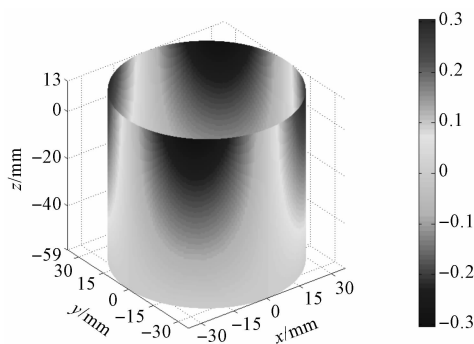


(a) 筒体 α 向位移理论值

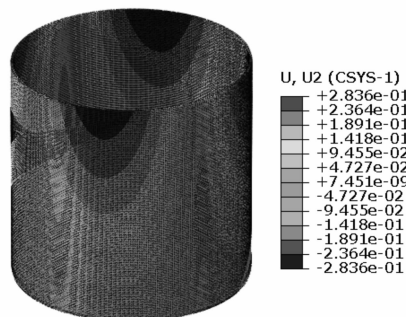


(b) 筒体 α 向位移有限元值

图 5 柔轮筒体 α 向位移

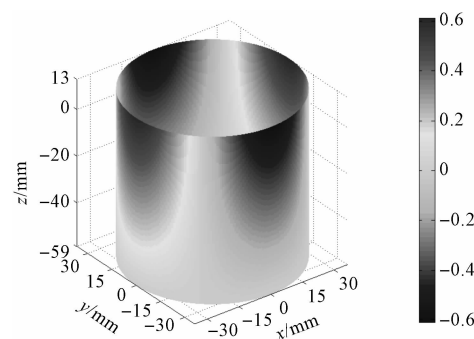


(a) 筒体 β 向位移理论值

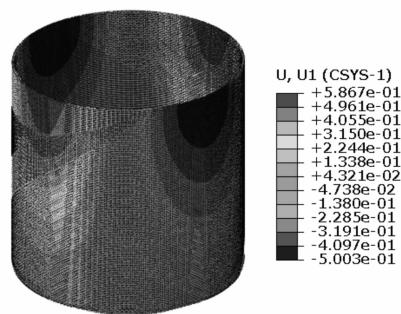


(b) 筒体 β 向位移有限元值

图 6 柔轮筒体 β 向位移



(a) 筒体 γ 向位移理论值



(b) 筒体 γ 向位移有限元值

图 7 柔轮筒体 γ 向位移

通过观察图(5 ~ 7) 可以发现:理论计算出的各方向位移和有限元结果的分布基本完全一致;其中,理论计算的 α 、 β 、 γ 3 个方向的中面位移,最大值分别为 0.076 mm,0.30 mm,0.60 mm,有限元得到的最大值分别为 0.072 mm,0.28 mm,0.58 mm。

由此可以说明本文的计算方法能够有效、准确地计算出柔轮筒体上各位点的位移。

4 结束语

本文对柔轮的受力模型情况进行了简化,用一圈径向线载荷等效波发生器对柔轮筒体的作用力;在此基础上提出了一种考虑轴向变形的柔轮中面各点位移的计算方法。

由该方法得到的理论值与有限元值的最大误差为 6.7%,且很好地体现了柔轮轴向变形带来的影响,更加符合实际变形结果。

本文的计算模型适用于各种边界条件下的谐波减速器柔轮;同时,利用本文的结果,可以进一步算出柔轮筒体上各点的总位移及其各向应力大小,从而更加

(下转第 349 页)

本文引用格式:

赵 彬,范元勋. 考虑轴向变形的谐波减速器柔轮中面位移计算[J]. 机电工程,2021,38(3):319-324,349.

ZHAO Bin, FAN Yuan-xun. Calculation of displacement of neutral layer of flexspline in harmonic reducer considering axial deformation [J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2021,38(3):319-324,349.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>