

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2022.02.004

基于谱方法的柔性悬架系统高效动力学仿真*

李晓飞, 李海艳*, 梁桂铭

(广东工业大学 机电工程学院, 广东 广州 510006)

摘要:针对巴哈赛车悬架系统柔性多体动力学模型计算效率低的问题,提出了一种基于谱方法的悬架系统动力学建模求解方法,并对该方法进行了仿真验证和分析。首先,采用了谱方法离散了悬架系统中柔性梁的弹性变形函数,并展开成有限项的 Chebyshev 多项式;再依据置换法对弹性变形函数进行了置换处理;然后,根据弹性变形函数和拉格朗日动力学公式,建立了谱表示的悬架系统动力学模型,并采用了广义 α 方法对其进行了迭代求解;最后,将程序仿真结果与有限元动力学模型和假设模态法动力学模型计算结果进行了对比验证。研究结果表明:与采用有限元方法的求解结果相比,两者关于车架位移的相对误差为 3.57%,关于柔性梁弹性变形的相对误差最小为 1.18%;与假设模态法模型的计算时间相比,该方法的计算效率更高,其效率是假设模态法效率的 4.896 倍。

关键词:谱方法;悬架系统;动力学建模;动力学仿真;弹性变形

中图分类号:TH122;U463.33

文献标识码:A

文章编号:1001-4551(2022)02-0166-08

Efficient dynamics simulation of flexible suspension system based on spectral method

LI Xiao-fei, LI Hai-yan, LIANG Gui-ming

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract: Aiming at the problem of low calculation efficiency for the flexible multi-body dynamics model of the Baja racing suspension system, a method was proposed and simulation verification and analysis were carried out for dynamic modeling and solving of suspension system based on spectral method. Firstly, the spectral method was used to discretize the elastic deformation function of the flexible beam in the suspension system and expanded it into a finite-term Chebyshev polynomial. Then, the elastic deformation function was processed based on the replacement method. The dynamic model of the suspension system expressed by the spectrum was established based on the elastic deformation function and the Lagrange dynamics formula, and the generalized α method was used to solve it iteratively. Finally, the simulation results of the program were compared with the calculation results of the finite element dynamic model and the hypothetical modal dynamic model. The research results show that the relative error of the frame displacement is 3.57% and the minimum relative error of the elastic deformation of the flexible beam is 1.18% between the simulation results and the calculation results of the finite element dynamics model. Comparing with the hypothetical modal method model, the computational efficiency of this method is 4.896 times more than that of the hypothetical modal method.

Key words: spectral method; suspension system; dynamics modeling; dynamics simulation; elastic deformation

0 引言

车辆悬架系统受到多种作用力,其对车辆系统动

力学性能影响非常大,所以建立悬架系统动力学模型并进行仿真是研究车辆系统动力学性能的重要工作之一。

收稿日期:2021-08-17

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51975125,51405177)

作者简介:李晓飞(1996-),男,湖南永州人,硕士研究生,主要从事柔性多体动力学建模仿真与振动分析方面的研究。E-mail:2194523564@qq.com

通信联系人:李海艳,女,博士,副教授,硕士生导师。E-mail:cathylyh@gdut.edu.cn

车辆的悬架系统属于柔性多体系统范畴,其柔性梁在运动时存在大位移的刚性运动,同时产生一定的弹性变形运动,这两种运动是高度耦合的^[1]。在悬架系统的动力学建模中,由于弹性变形有无限维自由度的特点,其精确解无法求得。目前处理弹性变形的办法一般是将其在时间和空间方面离散,求取其近似解^[2]。常用的离散方法有3种,即有限单元法、假设模态法和谱方法。

其中,有限单元法是在空间上将柔性体划分成网格单元,通过求解网格单元的变形近似弹性变形的精确解。PATIL A M 等人^[3]使用有限元方法,建立了悬架系统静止状态下的动力学模型。GADADE M B 等人^[4]针对商用车前下悬架臂的设计问题,研究了静止状态下的悬架系统三维有限元动力学模型。NABAWY A E 等人^[5]使用平面杆单元,建立了一种悬架系统综合的有限元模型,研究了双叉梁悬架系统的动态响应。

依据有限单元法离散求解了柔性体弹性变形,虽然保证了求解精度,但是其划分网格单元较多,使得其计算量非常大,计算效率低。

而采用假设模态法时,需通过先验知识求得柔性体的模态和振型,然后根据精度要求决定截断振型函数的阶数,再通过振型拟合柔性体的变形。VAKIL M 等人^[6]使用假设模态法建立了柔性连杆动力学模型,并分析了其动力学模型的可行性。潘云^[7]采用假设模态法,建立了柔性机械臂的动力学模型,并对机械臂的轨迹控制进行了研究。张晓宇等人^[8,9]依据假设模态法,建立了柔性连杆的动力学模型,研究了其对控制器设计的影响。

虽然采用假设模态法拟合弹性变形函数比较简便,但是其所增加的振型函数的项数会产生计算效率急剧降低的问题。

谱方法^[10]是通过一组正交多项式的有限级数来表示柔性体弹性变形。它无需对网格进行划分,也不需要先验知识处理弹性变形函数的拟合,具有收敛快、高精度的特点。

基于上述原因,笔者将谱方法引入到柔性多体动力学建模中,将巴哈赛车悬架系统中柔性梁的弹性变形函数离散成 Chebyshev 多项式的有限级数形式,通过置换方法处理弹性变形函数,再利用弹性变形函数和拉格朗日动力学公式建立悬架系统的柔性多体动力学模型,通过广义 α 方法^[11]进行迭代求解;最后将计算结果与其他方法进行对比,验证基于谱方法的悬架系统动力学建模求解的准确性和高效性。

1 悬挂系统解耦与柔性梁运动描述

巴哈赛车模型如图 1 所示。

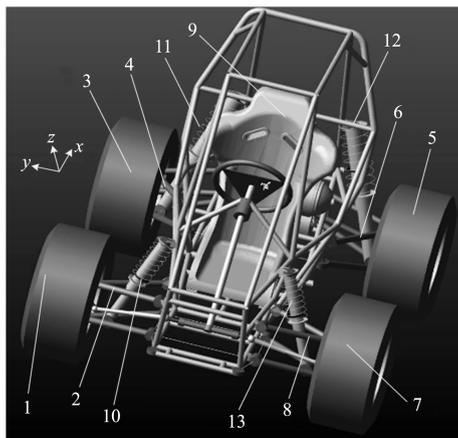


图1 巴哈赛车模型

1,3,5,7—轮胎;2,4,6,8—柔性梁;
9—车架;10,11,12,13—减震器

为了便于对悬架系统进行建模,笔者依据浮动框架建立悬架系统的坐标系,即以初始状态车架的重心 o 为原点建立 $oxyz$ 绝对坐标系,然后以运动部件 i ($i = 1, 2, \dots, 9$) 的重心 o_i 为局部坐标系原点,建立初始状态与绝对坐标系平行的局部坐标系 $o_i x_i y_i z_i$;

由于悬架系统左右对称,笔者依据文献^[12]的悬架解耦控制方法,将悬架系统解耦成4个1/4悬架和1个受到4个弹簧阻尼力的车架系统,整个悬架系统按5部分进行动力学建模,再利用其作用力之间的关系形成完整的动力学模型。

接下来,笔者对1/4悬架系统进行分析。

1/4悬架系统原理图如图2所示。

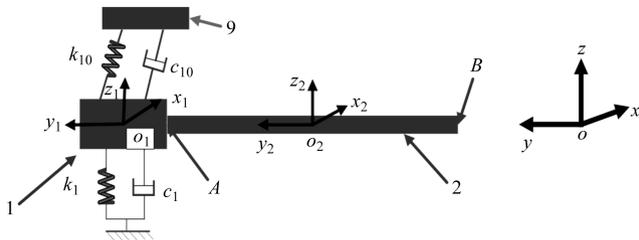


图2 1/4悬挂系统

k_1, k_{10} —弹簧阻尼器1,10弹性系数; c_1, c_{10} —弹簧阻尼器1,10弹性系数

笔者将减震器简化成弹簧阻尼器10,将轮胎1简化成刚体1和弹簧阻尼器1。由于柔性梁2的长度远大于其截面的直径,柔性梁的截面方向的变形变化非常小,其中心线的变形可比较精确地表示截面的变形,柔性梁可简化为空间梁结构。

笔者依据图2对柔性梁2进行运动分析。

柔性梁 2 上某一点 p 的位移矢量为:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}_2 (\mathbf{u}_{20} + \mathbf{u}_{2f}) \quad (1)$$

式中: \mathbf{R}_2 —点 o_2 在绝对坐标系 $oxyz$ 上的位移; \mathbf{A}_2 —柔性梁 2 的旋转矩阵; $\mathbf{u}_{20}, \mathbf{u}_{2f}$ —点 p 在局部坐标系 $o_2x_2y_2z_2$ 上的刚性位移和弹性变形位移。

2 基于谱方法的动力学建模

2.1 柔性梁弹性变形表示

根据柔性梁 2 的运动描述可知, 柔性梁 2 的位移由刚性位移与弹性变形位移叠加而成。因此, 柔性梁 2 的弹性变形位移可表示为:

$$\mathbf{u}_{2f} = [u_{2fx} \quad u_{2fy} \quad u_{2fz}]^T \quad (2)$$

式中: $u_{2fx}, u_{2fy}, u_{2fz}$ —弹性变形在 x_2, y_2 和 z_2 轴上的投影。

笔者依据谱方法将弹性变形位移函数进行离散, 将空间项和时间项分离, 得到有限级数表达式:

$$\begin{cases} u_{2fx}(y, t) = \sum_{m=0}^{M-1} a_{2m}(t) T_m(y) \\ u_{2fy}(y, t) = \sum_{m=0}^{M-1} b_{2m}(t) T_m(y) \\ u_{2fz}(y, t) = \sum_{m=0}^{M-1} c_{2m}(t) T_m(y) \end{cases} \quad (3)$$

式中: $T_m(y)$ —区间 $[-L_2/2, L_2/2]$ 上的第一类切比雪夫多项式; $a_{2m}(t), b_{2m}(t), c_{2m}(t)$ —对应的谱表示系数; L_2 —柔性梁 2 长度; M —多项式截断数。

将弹性变形函数写成矩阵表示形式, 即:

$$\mathbf{u}_{2f} = \mathbf{U}_{2f} \mathbf{q}_{U2} + \mathbf{V}_{2f} \mathbf{q}_{V2} \quad (4)$$

其中:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{U2} = [a_{20}, a_{21}, \dots, a_{2(M-5)}, \\ b_{21}, \dots, b_{2(M-3)}, c_{20}, c_{21}, \dots, c_{2(M-5)}]^T \\ \mathbf{q}_{V2} = [a_{2(M-4)}, \dots, a_{2(M-1)}, b_{2(M-2)}, \\ b_{2(M-1)}, c_{2(M-4)}, \dots, c_{2(M-1)}]^T \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{2f} = \text{diag}(S_1 \quad S_2 \quad S_1) \\ \mathbf{V}_{2f} = \text{diag}(S_3 \quad S_4 \quad S_3) \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} S_1 = [T_0 \quad T_1 \quad \dots \quad T_{M-5}] \\ S_2 = [T_0 \quad T_1 \quad \dots \quad T_{M-3}] \\ S_3 = [T_{M-4} \quad T_{M-3} \quad T_{M-2} \quad T_{M-1}] \\ S_4 = [T_{M-2} \quad T_{M-1}] \end{cases} \quad (7)$$

由于根据谱方法得到的柔性梁 2 弹性变形位移函数需要满足相应的边界条件, 需要对弹性变形位移函数进行置换处理。

柔性梁 2 上点 A 为固定连接, 点 B 为铰接, 所以

$u_{2fx}, u_{2fy}, u_{2fz}$ 需要满足如下边界条件:

$$\begin{cases} u_{2fx} \left(\pm \frac{L_2}{2}, t \right) = 0 \\ \frac{d \left[u_{2fx} \left(\pm \frac{L_2}{2}, t \right) \right]}{dy} = 0 \\ u_{2fy} \left(\pm \frac{L_2}{2}, t \right) = 0 \\ u_{2fz} \left(\pm \frac{L_2}{2}, t \right) = 0 \\ \frac{d \left[u_{2fz} \left(\pm \frac{L_2}{2}, t \right) \right]}{dy} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

将式(8)写成矩阵形式, 即:

$$\mathbf{U}_2 \mathbf{q}_{U2} + \mathbf{V}_2 \mathbf{q}_{V2} = \mathbf{0} \quad (9)$$

其中:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_2 = \text{diag} \left(S_1 \quad \frac{dS_1}{dy} \quad S_2 \quad S_1 \quad \frac{dS_1}{dy} \right) \\ \mathbf{V}_2 = \text{diag} \left(S_3 \quad \frac{dS_3}{dy} \quad S_4 \quad S_3 \quad \frac{dS_3}{dy} \right) \end{cases} \quad (10)$$

根据式(9), \mathbf{q}_{V2} 可以表示为:

$$\mathbf{q}_{V2} = -\mathbf{V}_2^{-1} \mathbf{U}_2 \mathbf{q}_{U2} \quad (11)$$

将式(11)中的 \mathbf{q}_{V2} 置换代入式(4), 可得:

$$\mathbf{u}_{2f} = [\mathbf{U}_{2f} + \mathbf{V}_{2f} (-\mathbf{V}_2^{-1} \mathbf{U}_2)] \mathbf{q}_{U2} = \mathbf{S}_{2f} \mathbf{q}_{U2} \quad (12)$$

式中: \mathbf{u}_{2f} —满足边界条件的谱表示弹性位移函数; \mathbf{S}_{2f} —谱表示弹性位移函数的形函数; \mathbf{q}_{U2} —谱表示弹性位移函数的广义坐标。

2.2 动力学模型

根据式(1, 12) 所求得的柔性梁 2 的谱表示弹性位移函数 \mathbf{u}_{2f} , 形函数 \mathbf{S}_{2f} 和弹性变形广义坐标 \mathbf{q}_{U2} , 可得柔性梁 2 的谱表示的位移矢量为:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}_2 (\mathbf{u}_{20} + \mathbf{S}_{2f} \mathbf{q}_{U2}) \quad (13)$$

依据位移矢量 \mathbf{r}_2 , 对 t 求微分得到速度矢量, 可将柔性梁 2 的动能^[13] 表示为:

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_2} \rho_2 \dot{\mathbf{r}}_2^T \dot{\mathbf{r}}_2 dV_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_2^T \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{q}}_2 \quad (14)$$

式中: ρ_2 —柔性梁 2 的密度; \mathbf{M}_2 —质量矩阵; V_2 —柔性梁 2 的三维可行域; “ \cdot ”—对时间 t 微分。

其中:

$$\mathbf{q}_2 = [\mathbf{R}_2^T \quad \theta_2^T \quad \mathbf{q}_{U2}^T]^T \quad (15)$$

式中: θ_2 —局部坐标系 $o_2x_2y_2z_2$ 中 x_2, y_2, z_2 轴与绝对坐标系 $oxyz$ 中 x, y, z 轴的夹角向量。

将式(14)代入拉格朗日方程可得:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_2} \right)^T - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_2} \right)^T + \mathbf{C}_{q_2}^T \lambda = \mathbf{Q}_{2e} - \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_2 \quad (16)$$

经整理可得谱表示的柔性梁 2 的运动方程为:

$$M_2 \ddot{q}_2 + C_{q_2}^T \lambda = Q_{2e} + Q_{2v} - K_2 q_2 \quad (17)$$

式中: C_{q_2} —雅克比矩阵。

其中:

$$K_2 = \int_{V_2} S_{2f}^T D S_{2f} dV_2 \quad (18)$$

$$Q_{2v} = -\dot{M}_2 \dot{q}_2 + \left(\frac{\partial T}{\partial q_2} \right)^T \quad (19)$$

式中: D —三维弹性矩阵。

因为柔性梁 2 所受外力只有重力,所以广义外力 Q_{2e} 可通过虚功原理^[14]求得,即:

$$\delta W_{2e} = Q_{2e} \delta q_2 = \int_{V_2} \rho_2 [0 \quad 0 \quad -g] \delta \mathbf{r}_2 dV_2 \quad (20)$$

式中: g —重力加速度; δq_2 —虚位移。

由于车轮 1 简化为刚体 1 与弹簧阻尼器 1,其刚体 1 运动方程为:

$$M_1 \ddot{q}_1 + C_{q_1}^T \lambda = Q_{1e} \quad (21)$$

式中: M_1 —刚体 1 的质量矩阵; R_1 —刚体 1 的质心坐标。

其中:

$$q_1 = [R_1^T \quad \theta_1^T]^T \quad (22)$$

式中: θ_1 —局部坐标系 $o_1x_1y_1z_1$ 中 x_1, y_1, z_1 轴与绝对坐标系 $oxyz$ 中 x, y, z 轴的夹角向量。

由于刚体 1 所受的外力为弹簧阻尼力和重力,且作用于质心,其广义外力 Q_{1e} 为:

$$Q_{1e} = [0 \quad Q_{1ey} \quad Q_{1ez} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (23)$$

其中:

$$\begin{cases} Q_{1ey} = \tan(\gamma) \psi_1 \\ Q_{1ez} = k_1 (R_f - u_{1z}) + c_1 (R_f - \dot{u}_{1z}) - m_1 g - \cot(\gamma) \psi_1 \\ \psi_1 = k_{10} (u_{1z} - u_{9z} - L_a \beta_9) + c_{10} (\dot{u}_{1z} - \dot{u}_{9z} - L_a \dot{\beta}_9) \end{cases} \quad (24)$$

式中: γ —弹簧阻尼器 10 与 z 轴的夹角; u_{9z} —车架的在 z_9 轴的位移; β_9 —车架关于 y_9 轴的转角; L_a —车架质心在 x 轴向与弹簧阻尼器 10 的距离; R_f —地面激励。

根据式(17,21)可得 1/4 悬架系统动力学方程为:

$$\begin{bmatrix} M_1 & \\ & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + C_{q_{12}}^T \lambda = \begin{bmatrix} Q_{1e} \\ Q_{2e} + Q_{2v} - K_2 q_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

由于广义坐标 q_1 与 q_2 受约束影响而不完全独立, $C_{q_{12}}$ 需要根据柔性梁 2 与车轮 1 的约束方程求得。

柔性梁 2 与车轮 1 在点 A 为固定连接,在点 B 与底盘铰接,其对应的约束方程为:

$$\begin{cases} R_1 + A_1 u_{1A} - R_2 - A_2 (u_{20A} + S_{2fA} q_{U2}) = 0 \\ \theta_1 - \theta_2 = 0 \\ R_2 + A_2 (u_{20B} + S_{2fB} q_{U2}) - R_{cB} = 0 \end{cases} \quad (26)$$

式中: u_{1A}, u_{20A} —点 A 在局部坐标系 $o_1x_1y_1z_1$ 和 $o_2x_2y_2z_2$ 上的初始位移; S_{2fA} —点 A 在局部坐标系 $o_2x_2y_2z_2$ 上的形函数; S_{2fB} —点 B 在局部坐标系 $o_2x_2y_2z_2$ 上的形函数; R_{cB} —点 B 在全局坐标系 $oxyz$ 上的位移。

将式(26)表示为:

$$\Phi_{q_{12}} = 0 \quad (27)$$

雅克比矩阵 $C_{q_{12}}$ 和加速度右项 $Q_{c_{12}}$ 可由文献[15]中的公式求得,即:

$$\begin{cases} C_{q_{12}} = \frac{\partial \Phi_{q_{12}}}{\partial q_{12}} \\ \ddot{\Phi}_{q_{12}} = C_{q_{12}} \ddot{q}_{12} - Q_{c_{12}} = 0 \end{cases} \quad (28)$$

式中:“ $\ddot{\cdot}$ ”—对 t 的二阶微分。

由于车架与车轮是通过弹簧阻尼器连接,车架运动只与外力有关,且车架为刚体,其动力学方程为:

$$M_9 q_9 = Q_{9e} \quad (29)$$

式中: M_9 —车架的质量矩阵; q_9 —广义坐标。

由于悬架系统^[16]左右对称,车架受到的外力为弹簧阻尼力和重力, Q_{9e} 为:

$$Q_{9e} = [0 \quad Q_{9ey} \quad Q_{9ey} \quad 0 \quad M_{9ey} \quad 0]^T \quad (30)$$

其中:

$$\begin{cases} Q_{9ey} = \tan \gamma (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4) \\ Q_{9ez} = \cot \gamma (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4) \\ M_{9ey} = \cot \gamma (\psi_1 L_a + \psi_2 L_b + \psi_3 L_b + \psi_4 L_a) \\ \psi_2 = k_{11} (u_{3z} - u_{9z} + L_b \beta_9) + c_{11} (\dot{u}_{3z} - \dot{u}_{9z} + L_b \dot{\beta}_9) \\ \psi_3 = k_{12} (u_{5z} - u_{9z} + L_b \beta_9) + c_{12} (\dot{u}_{5z} - \dot{u}_{9z} + L_b \dot{\beta}_9) \\ \psi_4 = k_{13} (u_{7z} - u_{9z} - L_a \beta_9) + c_{13} (\dot{u}_{7z} - \dot{u}_{9z} - L_a \dot{\beta}_9) \end{cases} \quad (31)$$

式中: L_b —车架质心在 x 轴向与弹簧阻尼器 11 的距离; k_{11}, k_{12}, k_{13} —弹簧阻尼器 11 - 13 的弹性系数; c_{11}, c_{12}, c_{13} —弹簧阻尼器 11 - 13 的阻尼系数; u_{jz} —车轮 j ($j=1, 3, 5, 7$) 的 z 轴的位移。

同理,通过式(25),可求其他 1/4 悬架系统的动力学方程,然后根据所求得的悬架系统动力学方程和车架的动力学方程,依据广义坐标,可形成整车悬架系统的动力学模型。

将其与约束方程整理成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} M & C_q^T \\ C_q & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_e + Q_v - Kq \\ Q_c \end{bmatrix} \quad (33)$$

3 数值仿真及分析

3.1 广义 α 方法迭代求解

悬架系统参数^[17]如表 1 所示。

表 1 悬架系统参数

参数/单位	数值
车轮质量/kg	20
车架质量/kg	300
柔性梁弹性模量/GPa	200
柔性梁泊松比/	0.3
车前端柔性梁长度/m	0.385
车后端柔性梁长度/m	0.34
柔性梁截面外圆半径/m	0.015
柔性梁截面内圆半径/m	0.01
柔性梁密度/kg * m ⁻³	7 800
车架质量中心/m	(0.243, 0, 0.365)
弹簧弹性系数/N * m	10 000
阻尼器 10、13 阻尼数/M * s m ⁻¹	50
阻尼器 11、12 阻尼数/M * s m ⁻¹	500
弹簧阻尼器与 z 轴角/(°)	30
轮胎刚度/N * m	138 000
轮胎阻尼系数/M * s m ⁻¹	1 570
车轮转动惯量/kg * m ²	0.179 2
车架转动惯量/kg * m ²	0.325 0
	44.507 7
	88.232 7
	89.634 9
前车轮的激励	0.05sin(2πt)
后车轮的激励	0.075sin(4πt)

为了验证基于谱方法的悬架系统动力学模型的可行性和高效性,笔者利用表 1 中的参数对其进行仿真求解。通过广义 α 方法的仿真求解流程如图 3 所示。

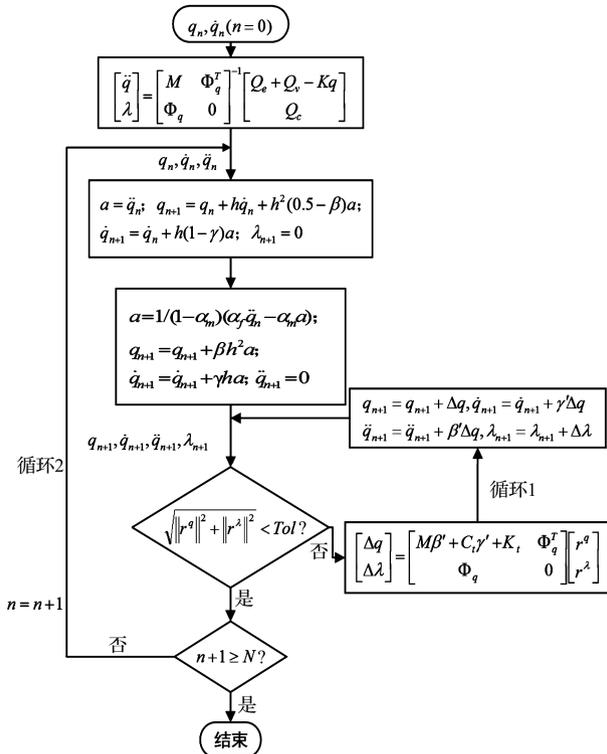


图 3 仿真流程图

具体仿真流程为:

(1)取时间间隔为 h ,利用零时刻 t_0 的 q_0 和 \dot{q}_0 ,将其代入悬架系统动力学模型,计算出 \ddot{q}_0 ,以 q_0, \dot{q}_0 和 \ddot{q}_0 作为广义 α 方法初始输入变量 q_n, \dot{q}_n 和 \ddot{q}_n ;

(2)依据 q_n, \dot{q}_n 和 \ddot{q}_n ,通过广义 α 方法流程图中流程框 1 和 2 的公式,求得下一时刻的迭代初始值 $q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}, \ddot{q}_{n+1}$ 和 λ_{n+1} ;

(3)通过计算 r^q 和 r^λ 的二范数残差,判断输入 $q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}, \ddot{q}_{n+1}$ 和 λ_{n+1} 是否满足误差条件,如果满足,则进入第 2 个判断框;如果不满足,则执行循环 1;通过流程框 3 和 4 中的公式,求解新的 $q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}, \ddot{q}_{n+1}$ 和 λ_{n+1} ,然后继续进行判断是否满足误差条件,不满足,则继续执行循环 1;如果满足,则跳出循环 1,进入第 2 个判断框;

(4)根据第 2 判断框,判断是否执行到末尾时刻 t_N ,如果执行到末尾时刻 t_N 则执行结束操作;如果不是则将步骤(3)中求得的 $q_{n+1}, \dot{q}_{n+1}, \ddot{q}_{n+1}$ 作为步骤(2)中的输入变量,然后依次执行步骤(2)、(3)和(4),直至执行完 t_N 时刻的 $q_N, \dot{q}_N, \ddot{q}_N$ 和 λ_N 的求解,结束迭代流程。

由于流程图 3 中其他参数和变量相应文献有详细描述和具体计算公式,此处不再赘述。

3.2 与有限元动力学模型的车架位移对比

根据仿真求出的广义坐标 q ,可直接获得悬架系统车架的运动位移。车架的位移主要为 z 方向平移位移和 β_y 方向的旋转位移。

笔者将仿真的车架位移与求解三维有限元动力学模型得到的车架位移相对比。

其中,车架 z 轴位移如图 4 所示。

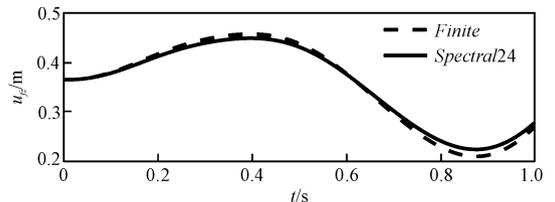


图 4 车架 z 轴位移

车架 y 向转角如图 5 所示。

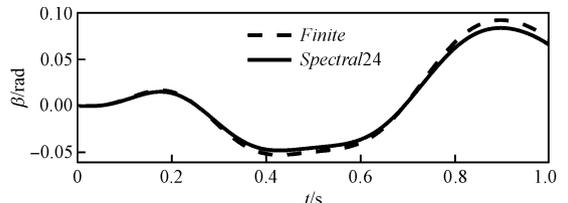


图 5 车架 y 向转角

通过二范数可计算其相对误差 ζ :

$$\zeta = \frac{\sqrt{\| \mathbf{D}_F - \mathbf{D}_S \|^2}}{\sqrt{\| \mathbf{D}_F \|^2}} \quad (34)$$

式中: \mathbf{D}_F —精确解; \mathbf{D}_S —试验解。

以有限元的仿真的车架位移为精确解 \mathbf{D}_F , 基于谱方法动力学模型的车架位移为试验解 \mathbf{D}_S , 车架 z 向位移二范数相对误差为 3.57%, y 向转角的二范数相对误差为 3.37%。

该结果表明:基于谱方法的悬架系统动力学模型的误差在可容许范围内。

3.3 与有限元动力学模型柔性梁弹性位移对比

根据仿真迭代求出的广义坐标 \mathbf{q} 和已知的弹性变形的形函数 $S_{j'} (j=2, 4, 6, 8)$, 可求出柔性梁 j 的弹性变形。

笔者将不同 Chebyshev 多项式阶数下, 基于谱方法的动力学模型仿真求得的柔性梁弹性变形位移, 与有限元动力学模型求解得到的不同时刻下弹性变形位移相对比, 结果如图(6~11)所示。

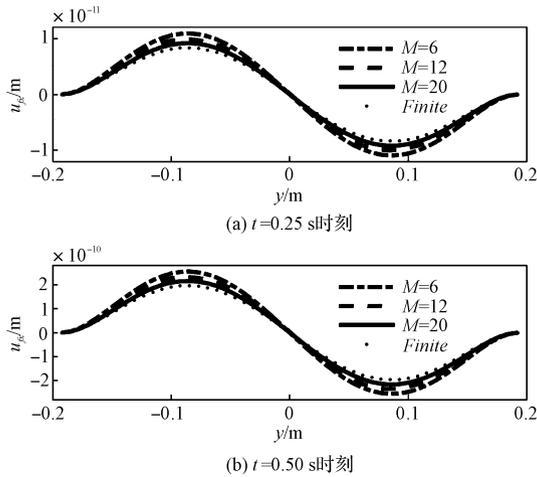


图6 柔性梁2的x向弹性位移

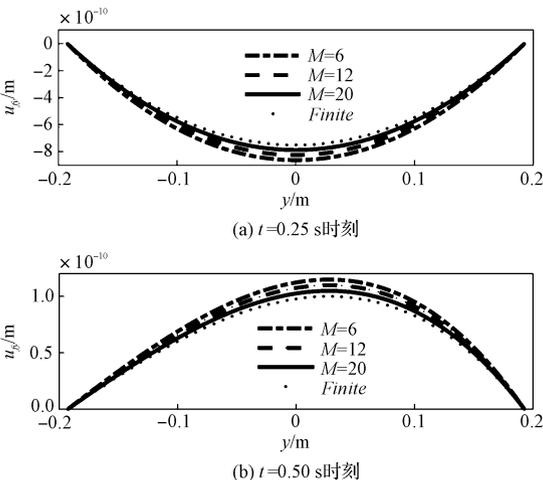


图7 柔性梁2的y向弹性位移

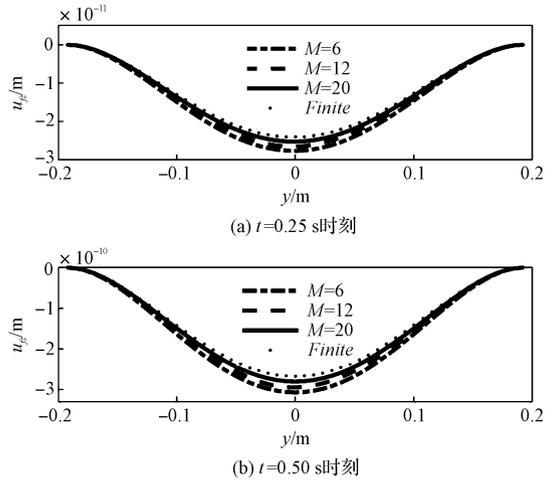


图8 柔性梁2的z向弹性位移

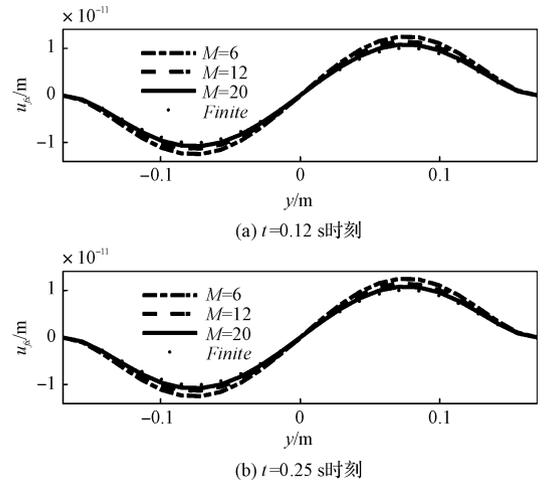


图9 柔性梁4的x向弹性位移

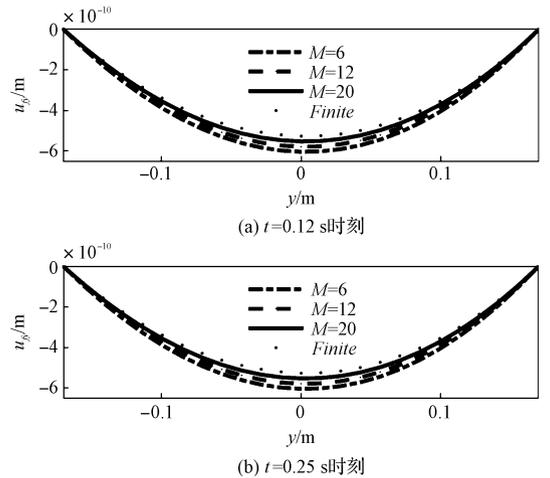


图10 柔性梁4的y向弹性位移

接着,笔者以有限元动力学模型求解出的柔性梁弹性位移为准确值,以基于谱方法动力学模型计算出的柔性梁弹性变形为试验值,通过式(34)计算弹性变形二范数相对误差,结果如表2所示。

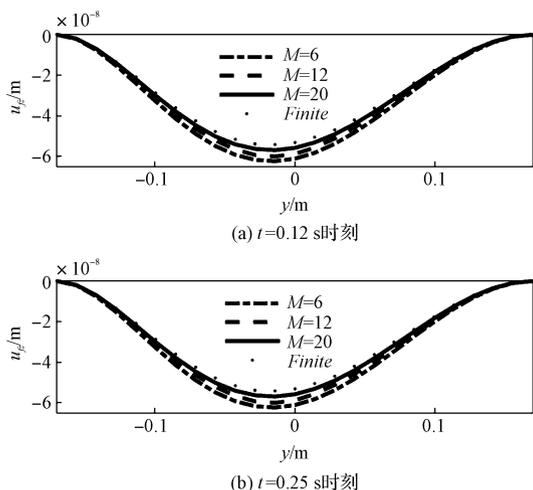


图 11 柔性梁 4 的 z 向弹性位移

表 2 不同阶数下的柔性梁相对误差

M	误差(柔性梁 2)			误差(柔性梁 4)			时间/s
	$\zeta_x/\%$	$\zeta_y/\%$	$\zeta_z/\%$	$\zeta_x/\%$	$\zeta_y/\%$	$\zeta_z/\%$	
6	7.74	3.70	6.27	7.57	3.36	6.02	8.138
8	5.56	2.65	4.32	5.13	1.87	4.28	8.459
12	3.51	1.78	2.45	3.49	1.58	2.84	12.032
16	1.55	1.54	1.39	1.52	1.48	1.92	22.072
20	1.16	1.21	1.17	1.24	1.35	1.38	33.550
24	1.13	1.11	1.14	1.13	1.18	1.13	54.898
模态 24	1.14	1.13	1.15	1.20	1.17	1.45	268.79
有限元	0	0	0	0	0	0	

根据表 2 的数据和图(6~11)的结果可得:

(1)随着谱方法选取 Chebyshev 多项式项数的增加,笔者所提的方法的计算精度不断提高,当所取 Chebyshev 多项式项数为 24 时,柔性梁弹性变形最大相对误差为 1.18% ;

(2)随着所取 Chebyshev 多项式项数增加,相对误差最大值的递减幅度越来越小,当所取多项式项数达到 16 时,继续增加多项式项数相对误差降低幅度已经不显著,最大降低幅度为 0.54% ;

(3)表 2 所示的时间为在相同计算机软件与硬件条件下,悬架系统动力学模型的求解时间;依据表 2 中的数据可知,随着所取 Chebyshev 多项式项数递增,求解总时间也在依次递增;

(4)当振型函数和 Chebyshev 多项式都取 24 阶时,假设模态法动力学模型求解时间是基于谱方法的悬架系统动力学模型求解计算时间的 4.896 倍。

4 结束语

笔者采用谱方法将悬架系统中柔性梁的弹性变形函数离散成 Chebyshev 多项式的有限级数形式,通过置换方法处理弹性变形函数得到的边界条件,再利用弹性变形函数和拉格朗日动力学公式建立悬架系统的柔性多体动力学模型,通过广义 α 方法迭代求解,最后将基于谱方法的悬架系统动力学模型的求解结果与其他方法下悬架系统动力学模型求解结果进行对比,得到了以下结论:

(1)将基于谱方法的悬架系统动力学模型的求解结果与有限元动力学模型仿真的求解结果相对比,车架位移的相对误差为 3.57%,柔性梁的弹性变形相对误差最小为 1.18% ;

(2)当振型函数和 Chebyshev 多项式都取 24 阶时,基于谱方法的悬架系统动力学模型的计算效率是假设模态法动力学模型计算效率的 4.896 倍,体现了谱方法的高效性;

(3)当所取 Chebyshev 多项式项数达到 16 时,继续增加阶数,基于谱方法的悬架系统动力学模型的计算精度提升不大,计算效率降低比较多,所以在动力学建模中需要适当地选取 Chebyshev 多项式项数。

目前谱方法使用的正交多项式是考虑截断其前 M 项,不是有选择性地挑选正交多项式中的项。因此,在后续的研究中,笔者将通过压缩感知稀疏理论,有选择性地挑选正交多项式中项,来拟合待求函数,以进一步提升其计算精度和效率。

参考文献(References):

- [1] 刘铸永,洪嘉振. 柔性多体系统动力学研究现状与展望[J]. 计算力学学报,2008,25(4):411-416.
- [2] ZHAND D G. Recursive Lagrangian dynamic modeling and simulation of multi-link spatial flexible manipulator arms[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, 30(10):1283-1294.
- [3] PATIL A M. Experimental & finite element analysis of left side lower wishbone arm of independent suspension system[J]. *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering (IOSR-JMCE)*, 2013,7(2):43-48.

(下转第 230 页)

本文引用格式:

李晓飞,李海燕,梁桂铭. 基于谱方法的柔性悬架系统高效动力学仿真[J]. 机电工程,2022,39(2):166-172,230.

LI Xiao-fei, LI Hai-yan, LIANG Gui-ming. Efficient dynamics simulation of flexible suspension system based on spectral method[J]. *Journal of Mechanical & Electrical Engineering*, 2022,39(2):166-172,230.

《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>

参考文献 (References) :

- [1] WECK M, KRUSE A, GOHRITZ A. Determination of surface fatigue of gear material by roller tests [J]. **Journal of Mechanical Design**, 1978, 100(3) : 433.
- [2] CHOY F K, RUAN Y F, TU R K, et al. Modal analysis of multistage gear systems coupled with gearbox vibrations [J]. **Journal of Solar Energy Engineering**, 1992, 114(3) : 486-497.
- [3] 贺朝霞, 周建星. 齿轮动态啮合过程应力仿真与分析. [J]. **机械传动**, 2013, 37(9) : 50-54.
- [4] QIN WJ, GUAN CY. An investigation of contact stresses and crack initiation in spur gears based on finite element dynamics analysis [J]. **International Journal of Mechanical Sciences**, 2014, 83 : 96-103.
- [5] 周海燕. 斜齿轮动力学接触分析及齿向优化研究 [D]. 济南: 山东大学机械工程学院, 2015.
- [6] WANG ZG, CHEN YC. Design of a helical gear set with adequate linear tip-relief leading to improve static and dynamic characteristics [J]. **Mechanism and Machine Theory**, 2020, 147 : 1-20.
- [7] JABBOUR T, ASMAR G. Tooth stress calculation of metal spur and helical gear [J]. **Mechanism and Machine Theory**, 2015, 92 : 375-390.
- [8] 冯海生, 王黎钦, 郑德志, 等. 考虑变工况冲击的齿轮动态啮合力分析 [J]. **振动. 测试与诊断** 2015, 35(2) : 212-217, 394.
- [9] 樊智敏, 周万峰, 王瑞雪. 双渐开线齿轮齿面摩擦力对接触应力的影响 [J]. **润滑与密封**, 2016, 41(5) : 1-5.
- [10] 朱琳琳, 武宝林, 李 杨. 双圆弧圆柱齿轮传动的接触特性分析 [J]. **机械传动**, 2016, 40(2) : 149-149.
- [11] 王均刚, 墨蕊娜, 杨富春. 基于非线性有限元接触理论行星齿轮副瞬态啮合特性研究 [J]. **机床与液压**, 2017, 45(1) : 133-139.
- [12] 陆俊华, 朱如鹏, 靳广虎. 行星传动动态均载特性分析. [J]. **机械工程学报**, 2009, 45(5) : 85-90.
- [13] 何永涛. 重载车轮边减速器齿轮非线性接触分析及齿轮修形研究 [D]. 杭州: 浙江工业大学机械工程学院, 2017.
- [14] YLIMAZ T, DOGAN O, KARPAT F. A comparative numerical study of forged bi-metal gear: Bending strength and dynamic response [J]. **Mechanism and Machine Theory**, 2019, 141 : 117-135.
- [15] 王 伟, 郭宗和, 秦志昌. 某行星齿轮减速器多齿啮合动力学特性研究 [J]. **山东理工大学学报**, 2021, 35(6) : 41-47.

[编辑: 李 辉]

本文引用格式:

曲 伟, 樊智敏, 陈 亮, 等. 行星轮边减速器动态接触特性研究 [J]. **机电工程**, 2022, 39(2) : 224 - 230.QU Wei, FAN Zhi-min, CHEN Liang, et al. Dynamic contact characteristics of planetary gear reducer [J]. **Journal of Mechanical & Electrical Engineering**, 2022, 39(2) : 224 - 230.《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>

(上接第 172 页)

- [4] GADADE B, TODKAR R G. Design, analysis of A-type front lower suspension arm in Commercial vehicle [J]. **International Research Journal of Engineering and Technology**, 2015, 2(7) : 759-766.
- [5] NABAWY A E, ABDELRAHMAN A A, ABDALLA W S, et al. Analysis of the dynamic behavior of the double wishbone suspension system [J]. **International Journal of Applied Mechanics**, 2019, 11(34) : 1-19.
- [6] VAKIL M, FOTOUHI R, NIKIFORUK P N. A new method for dynamic modeling of flexible-link flexible-joint manipulators [J]. **Journal of Vibration & Acoustics**, 2012, 134(1) : 1-11.
- [7] 潘 云. 基于谱方法的刚柔机械手模型降维与控制研究 [D]. 长沙: 中南大学机电工程学院, 2011.
- [8] 张晓宇, 刘晓峰, 蔡国平, 等. 柔性关节柔性连杆机械臂的动力学建模 [J/OL]. **动力学与控制学报**: 1-20 [2021-05-26]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/43.1409.O3.20210525.0832.004.html>.
- [9] 王文辉. 基于能量模型的柔性关节机械臂参数辨识方法 [J]. **机械制造**, 2020, 58(4) : 5.
- [10] 张 晓. Matlab 微分方程高效解法: 谱方法原理与实现 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2016.
- [11] ARNOLD M, BRULS O. Convergence of the generalized- α scheme for constrained mechanical systems [J]. **Multibody System Dynamics**, 2007, 18(2) : 185-202.
- [12] ZHANG H L, ZHANG N, FU H, et al. Coupling mechanism and decoupled suspension control model of a half car [J]. **Mathematical Problems in Engineering**, 2016, 10(7) : 1-13.
- [13] SHABANA A A. Dynamics of Multibody Systems [M]. 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- [14] 曾 攀. 有限元基础教程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [15] SHERIF K, NACHBAGAUER K. A detailed derivation of the velocity-dependent inertia forces in the floating frame of reference formulation [J]. **Journal of Computational & Nonlinear Dynamics**, 2014, 9(4) : 1-8.
- [16] 韩君利, 陈 双. 一种新型液压式互联悬架结构及工作原理分析 [J]. **机电工程技术**, 2021, 50(10) : 219-221, 248.
- [17] EBRAHIMI M, BUTSCHER A, CHEONG H, et al. Design optimization of dynamic flexible multibody systems using the discrete adjoint variable method [J]. **Computers & Structures**, 2019, 213(3) : 82-99.

[编辑: 李 辉]