

DOI:10.3969/j.issn.1001-4551.2022.12.004

一种改进的非线性接触齿廓修形直齿轮 啮合刚度分析方法^{*}

王显彬¹, 孙 阳², 王军龙³

(1. 福建船政交通职业学院 通用航空产业学院, 福建 福州 350007; 2. 浙江工业大学 机械工程学院, 浙江 杭州 310023; 3. 博世电动工具(中国)有限公司, 浙江 杭州 310000)

摘要:时变啮合刚度是齿轮副的周期性内部激励,是齿轮传动系统振动和噪声问题的主要来源。针对齿廓修形的直齿轮啮合刚度计算问题,从能量等效思想出发,结合悬臂梁模型,考虑接触对间的非线性接触,提出了一种改进的非线性接触齿廓修形直齿轮啮合刚度解析模型。首先,在已有文献的基础上,将轮齿简化为齿根圆上的悬臂梁,三维的齿轮副传动模型转换为二维的平面齿廓,进行了接触分析,考虑齿对间的非线性接触,通过能量法构建了齿廓修形直齿轮单齿啮合刚度半解析模型;然后,补充了变形协调与力平衡方程,导出了齿廓修形直齿轮副综合啮合刚度模型;最后,将采用该方法所得结果与有限元计算结果进行了对比,完成了对该计算方法的验证,并分析了不同摩擦系数与齿轮参数对齿轮啮合刚度的影响规律。研究表明:相较于传统的有限元计算结果,采用该解析模型得到的计算误差在 3% 以内,计算速度提高 150 倍,在精度损失较小的情况下,能够实现非线性接触齿廓修形圆柱齿轮啮合刚度的快速求解。

关键词: 齿轮传动系统; 振动和噪声; 单齿啮合刚度模型; 时变啮合刚度计算模型; 摩擦系数; 能量等效; 悬臂梁模型

中图分类号: TH132.41

文献标识码: A

文章编号: 1001-4551(2022)12-1670-08

An improved method for analyzing meshing stiffness of nonlinear contact spur gear with tooth profile modification

WANG Xian-bin¹, SUN Yang², WANG Jun-long³

(1. Institute of General Aviation Industry, Fujian Chuanzheng Communications College, Fuzhou 350007, China;

2. School of Mechanical Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China;

3. Bosch Power Tools (China) Co., Ltd., Hangzhou 310000, China)

Abstract: Time-varying meshing stiffness was the periodic internal excitation of the gear pair, which was the main source of the vibration and noise of the gear transmission system. Aiming at the calculation of the meshing stiffness of spur gears with tooth profile modification, an improved analytical model of the meshing stiffness of spur gears with nonlinear contact profile modification was proposed based on the idea of energy equivalence, combined with the cantilever beam model and considering the nonlinear contact between contact pairs. Firstly, based on the existing literature, the gear tooth was simplified as a cantilever beam on the root circle and the three-dimensional transmission model of spur gear pair was transformed into two-dimensional plane tooth profile for contact analysis, a semi-analytical model of single tooth meshing stiffness was constructed by energy method considering the nonlinear contact between tooth pairs. Then, the equations of deformation coordination and force balance were supplemented to derive the time-varying meshing stiffness model of spur gear pair with tooth profile modification. Finally, compared with the finite element calculation results, the calculation method was verified and the influence rules of friction and different gear parameters on meshing stiffness were analyzed. The research results show that, compared with the traditional finite element calculation results, the calculation error obtained by using this analytical model is less than 3%, and the calculation speed is 150 times higher, and the rapid solution of meshing stiffness of the spur gear with nonlinear contact can be realized under the condition of little precision loss.

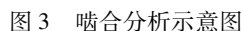
Key words: gear transmission system; vibration and noise; single tooth mesh stiffness model; time-varying mesh stiffness calculation model; friction coefficient; energy equivalence; cantilever beam model

收稿日期: 2022-04-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51475425); 国家教育部“科创融教”职业教育改革创新课题(HBKC217155)

作者简介: 王显彬(1981-), 男, 内蒙古赤峰人, 硕士, 副教授, 主要从事机械设计、液压系统设计与系统动态分析方面的研究。E-mail:

wxb42992762@163.com



由图 3 可知:假设小轮绕向量 $\mathbf{n}$ 旋转 u_p 角度,大轮绕 z_g 轴旋转 u_g 角度后,两轮截面齿廓于 p 点接触。由齿轮啮合理论可知:齿面瞬时接触点的求解就是计算两曲面(这里是齿面)的瞬时相切点。

首先,笔者将小轮坐标统一到小轮坐标系 $S_g(O_g - x_g y_g z_g)$ 中,小轮的法矢 $\mathbf{n}_{[g]}^{(p)}$ 与位置矢量 $\mathbf{R}_{[g]}^{(p)}$ 即可表示为:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{[g]}^{(p)} &= \mathbf{R}_{[p]}^{(p)} \cdot \mathbf{M}(k_p, \pi) + (C_d \ 0 \ 0), \\ \mathbf{n}_{[g]}^{(p)} &= \mathbf{n}_{[p]}^{(p)} \cdot \mathbf{M}(k_p, \pi)\end{aligned}\quad (2)$$

式中: C_d —中心距。

结合式(2),接触点的参数 v_g, v_p , 以及旋转角度 μ_g, μ_p (此处 u_g, u_p 根据截面齿廓位于齿宽方向上的位置给定)可由下式得到:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{[g]}^{(p)} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{n}, \mu_p) - \mathbf{R}_{[g]}^{(g)} \cdot \mathbf{M}(z_g, \mu_g) &= 0, \\ \mathbf{n}_{[g]}^{(p)} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{n}, \mu_p) + \mathbf{n}_{[g]}^{(g)} \cdot \mathbf{M}(z_g, \mu_g) &= 0\end{aligned}\quad (3)$$

1.3 基于势能法的齿轮啮合刚度求解原理

齿轮副受载产生变形,其存储的应变能包括赫兹接触应变能 U_h 、弯曲应变能 U_b 、剪切应变能 U_s 、轴向压缩应变能 U_a 以及齿基变形应变能 U_f 。

各应变能可表示为:

$$U_b = \frac{F^2}{2K_b}, U_s = \frac{F^2}{2K_s}, U_a = \frac{F^2}{2K_a}, U_h = \frac{F^2}{2K_h}, U_f = \frac{F^2}{2K_f} \quad (4)$$

式中: F —法向接触力; K_b —弯曲等效刚度; K_s —剪切等效刚度; K_a —轴向压缩等效刚度; K_h —赫兹等效刚度; K_f —齿轮基体等效刚度。

串联刚度模型如图 4 所示。

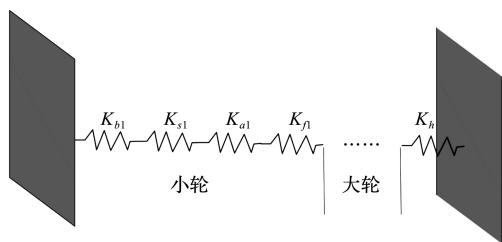


图 4 串联弹簧示意图

根据图 4,单齿啮合刚度 K 可表示为:

$$K = 1 / \left(\frac{1}{K_{b1}} + \frac{1}{K_{s1}} + \frac{1}{K_{a1}} + \frac{1}{K_{f1}} + \frac{1}{K_{b2}} + \frac{1}{K_{s2}} + \frac{1}{K_{a2}} + \frac{1}{K_{f2}} + \frac{1}{K_h} \right) \quad (5)$$

式中:脚标 1—主动轮;脚标 2—从动轮。

1.4 各等效刚度的求解

轮齿等效的悬臂梁模型如图 5 所示。

由图 5 可知:直齿轮的齿廓曲线可分为齿根曲线 DE 、过渡曲线 CD 、齿廓曲线 BC 和齿顶曲线 AB 。

结合梁变形理论,轮齿应变能可表示为:

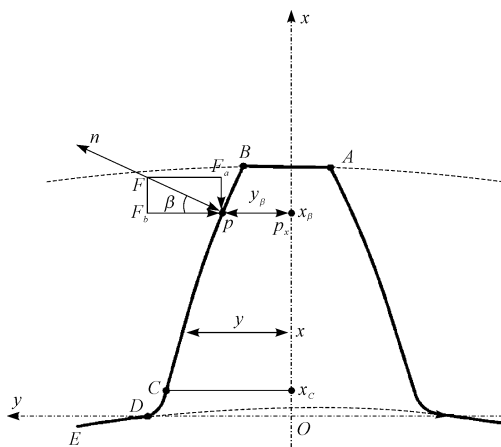


图 5 受力示意图

$$\begin{aligned}U_b &= \frac{F^2}{2K_b} = \int_0^{\alpha_\beta} \frac{M_{t1}^2}{2EI_x} dx = \int_0^{x_c} \frac{M_{t1}^2}{2EI_{x1}} dx_1 + \int_{x_c}^{\alpha_\beta} \frac{M_{t2}^2}{2EI_{x2}} dx_2, \\ U_s &= \frac{F^2}{2K_s} = \int_0^{\alpha_\beta} \frac{1.2F_b^2}{2GA_x} dx = \int_0^{x_c} \frac{1.2F_b^2}{2GA_{x1}} dx_1 + \int_{x_c}^{\alpha_\beta} \frac{1.2F_b^2}{2GA_{x2}} dx_2, \\ U_a &= \frac{F^2}{2K_a} = \int_0^{\alpha_\beta} \frac{F_a^2}{2EA_x} dx = \int_0^{x_c} \frac{F_a^2}{2EA_{x1}} dx_1 + \int_{x_c}^{\alpha_\beta} \frac{F_a^2}{2EA_{x2}} dx_2\end{aligned}\quad (6)$$

式中: M_{t1} —过渡曲线上的力矩; M_{t2} —齿廓曲线上的力矩; I_x —横截面的惯性矩; A_x —横截面的面积; E —弹性模量; G —剪切模量。

这些参数可分别表示为:

$$\begin{aligned}F_b &= F \cos \beta, F_a = F \sin \beta, \\ M_{t1} &= F_b(x_\beta - x_1) - F_a y_\beta, M_{t2} = F_b(x_\beta - x_2) - F_a y_\beta, \\ I_{x1} &= 2\gamma_1^3 W/3, I_{x2} = 2\gamma_2^3 W/3, A_{x1} = 2\gamma_1 W, A_{x2} = 2\gamma_2 W\end{aligned}\quad (7)$$

式中: W —齿宽; β —压力角。

压力角可由下式求得:

$$\beta = \arccos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{PP}_x / (|\mathbf{n}| |\mathbf{PP}_x|)) \quad (8)$$

将式(7)代入式(6),可得如下表达式:

$$\begin{aligned}\frac{1}{K_b} &= \int_0^{x_c} \frac{3[\cos \beta(x_\beta - x_1) - y_\beta \sin \beta]^2}{2E\gamma_1^3 W} dx_1 + \\ &\quad \int_{x_c}^{\alpha_\beta} \frac{3[\cos \beta(x_\beta - x_2) - y_\beta \sin \beta]^2}{2E\gamma_2^3 W} dx_2, \\ \frac{1}{K_s} &= \int_0^{x_c} \frac{1.2\cos^2 \beta}{2G\gamma_1 W} dx_1 + \int_{x_c}^{\alpha_\beta} \frac{1.2\cos^2 \beta}{2G\gamma_2 W} dx_2 \\ \frac{1}{K_a} &= \int_0^{x_c} \frac{\sin^2 \beta}{2E\gamma_1 W} dx_1 + \int_{x_c}^{\alpha_\beta} \frac{\sin^2 \beta}{2E\gamma_2 W} dx_2\end{aligned}\quad (9)$$

齿轮赫兹接触刚度一般是非线性的,即与非线性接触力有关。该结果也通过 FEM^[23] 和实验^[24] 得到了证实。

由于齿轮体和齿的刚度几乎与载荷无关,接触变形必须是非线性的。为了方便地模拟非线性赫兹接触,笔者采用了一个简单的近似公式^[25]:

$$K_h = E^{0.9} W^{0.8} F^{0.1} / 1.275 \quad (10)$$

式中: E —弹性模量, $E = 2E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$; E_1 —小轮的

弹性模量; E_2 —大轮的弹性模量。

齿基刚度 K_f 可表示为:

$$\frac{1}{K_f} = \frac{\cos^2 \beta}{EW} \left\{ L^* \left(\frac{u_f}{S_f} \right)^2 + M^* \left(\frac{u_f}{S_f} \right) + P^* (1 + Q^* \tan^2 \beta) \right\} \quad (11)$$

式(11)中, $u_f, S_f, L^*, M^*, P^*, Q^*$ 等参数详见文献[26]。

1.5 考虑摩擦的刚度求解

若对直齿轮副的实际动态特性进行预测,则需考虑摩擦力对齿轮副齿轮径向和切向啮合力的影响,从而导致轮齿弯曲、剪切、轴向压缩等变形刚度的变化。

轮齿接触摩擦力示意图,如图 6 所示。

由图 6 可知:节点处无相对滑动速度,摩擦因素 μ 趋于 0 即无摩擦力,靠近节点时摩擦力减小,远离节点时,摩擦力增大;对于主动轮,从齿根啮合至节点为啮入阶段,从节点啮合至齿顶为啮出阶段;从动轮则相反。

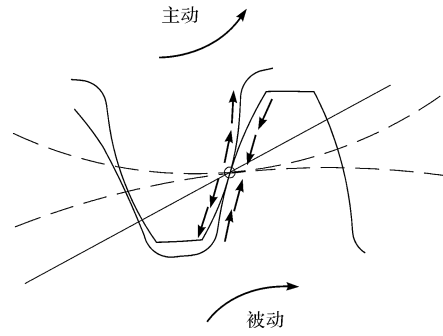


图 6 摩擦力示意图

由文献[27]可知,实测的齿轮副摩擦系数一般在 0.02 ~ 0.08 之间。为简化计算过程,此处笔者仅采用 0 ~ 0.1 的恒定摩擦系数。

结合式(9),可得摩擦力影响下的轮齿变形等效刚度如下:

$$\begin{cases} \frac{1}{K_b} = \int_0^{\alpha_c} \frac{3[(\cos\beta - \mu\sin\beta)(x_\beta - x_1) - y_\beta(\sin\beta + \mu\cos\beta)]^2}{2Ey_1^3 W} dx_1 + \\ \int_{x_c}^{\alpha_\beta} \frac{3[(\cos\beta - \mu\sin\beta)(x_\beta - x_2) - y_\beta(\sin\beta + \mu\cos\beta)]^2}{2Ey_2^3 W} dx_2 (\text{啮入}), \\ \frac{1}{K_b} = \int_0^{\alpha_c} \frac{3[(\cos\beta + \mu\sin\beta)(x_\beta - x_1) - y_\beta(\sin\beta - \mu\cos\beta)]^2}{2Ey_1^3 W} dx_1 + \\ \int_{x_c}^{\alpha_\beta} \frac{3[(\cos\beta + \mu\sin\beta)(x_\beta - x_2) - y_\beta(\sin\beta - \mu\cos\beta)]^2}{2Ey_2^3 W} dx_2 (\text{啮出}), \\ \frac{1}{K_s} = \int_0^{\alpha_c} \frac{1.2(\cos\beta - \mu\sin\beta)^2}{2Gy_1 W} dx_1 + \int_{x_c}^{\alpha_\beta} \frac{1.2(\cos\beta - \mu\sin\beta)}{2Gy_2 W} dx_2 (\text{啮入}), \\ \frac{1}{K_s} = \int_0^{\alpha_c} \frac{1.2(\cos\beta + \mu\sin\beta)^2}{2Gy_1 W} dx_1 + \int_{x_c}^{\alpha_\beta} \frac{1.2(\cos\beta + \mu\sin\beta)}{2Gy_2 W} dx_2 (\text{啮出}), \\ \frac{1}{K_a} = \int_0^{\alpha_c} \frac{(\sin\beta + \mu\cos\beta)^2}{2Ey_1 W} dx_1 + \int_{x_c}^{\alpha_\beta} \frac{(\sin\beta + \mu\cos\beta)}{2Ey_2 W} dx_2 (\text{啮入}), \\ \frac{1}{K_a} = \int_0^{\alpha_c} \frac{(\sin\beta - \mu\cos\beta)^2}{2Ey_1 W} dx_1 + \int_{x_c}^{\alpha_\beta} \frac{(\sin\beta - \mu\cos\beta)}{2Ey_2 W} dx_2 (\text{啮出}), \end{cases} \quad (12)$$

2 时变啮合刚度计算模型

齿轮副实际重合度与承载有关,若仅运用几何重合度导出时变啮合刚度模型^{[2]100},在不同扭矩的工况下,误差浮动会比较明显。

啮合过程示意图,如图 7 所示。

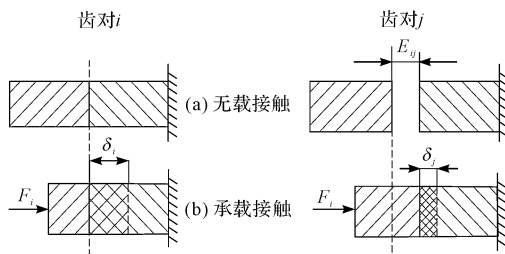


图 7 啮合过程示意图

由图 7(a) 可知:假设齿对 i 无载情况下开始接触,齿对 j 在该状态下存在间隙 E_{ij} ;由图 7(b) 可知,当齿对 i 在当前接触位置受力产生变形时,根据变形协调与力平衡条件可得:

$$\delta_i = \delta_j + E_{ij}, F = F_i + F_j \quad (13)$$

由刚度与变形量间的关系可得:

$$F_i = K_i \delta_i \quad (14)$$

结合式(13)中的第二式可得:

$$F = \sum_{i=1}^N F_i = \sum_{i=1}^N K_i \delta_i \quad (15)$$

假设其中第 k 对齿的变形量最大,则多齿啮合刚度 K_e 可表示为:

$$K_e = F / \delta_k \quad (16)$$

法向载荷除以法向变形量即为啮合刚度,因此,结

合式(13~16),经整理可得多齿啮合区综合刚度的表达式为:

$$K_e = \sum_{i=1}^N K_i / (1 + \sum_{i=1}^N K_i E_{ki} / F) \quad (17)$$

3 算例分析

3.1 解析模型的验证

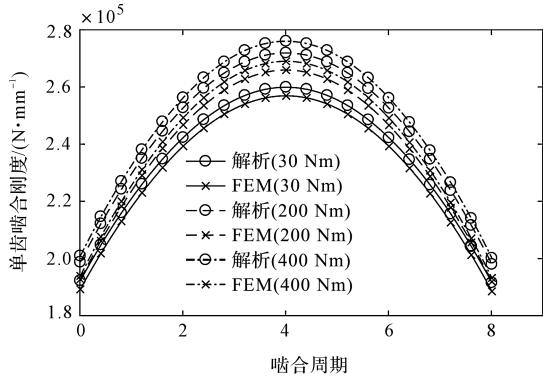
笔者运用 FEM 中的稳态计算方法,对该解析模型的有效性进行验证。其中,用于对比验证的齿轮副参数如表 1 所示。

表 1 轮齿参数

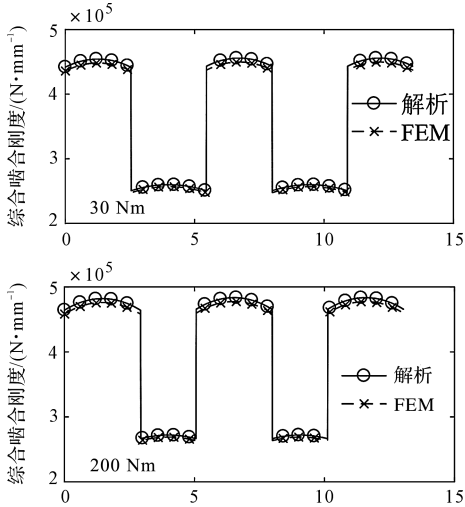
齿轮参数/单位	小轮	大轮
模数 m/mm	4	4
齿数	25	33
内孔直径 d_{int}/mm	40	40
齿宽 W/mm	20	20
压力角 $\alpha/(\circ)$	25	25
弹性模量 E/Gpa	210	210
泊松比 ν	0.3	0.3
齿廓修形量/ mm	0.02	0.02

笔者采用文献[28]的前后处理方法完成分析与数据的处理。

$\mu=0$, 扭矩分别为 30 Nm、200 Nm、400 Nm 时的齿轮副单齿与综合啮合刚度对比图,如图 8 所示。



(a) 不同扭矩下的单齿啮合刚度



(b) 不同扭矩下的综合啮合刚度

图 8 不同扭矩下的啮合刚度对比图

从图 8 中可以看出:解析模型与 FEM 计算结果吻合良好;从刚度曲线的变化可知,载荷的增大导致啮合刚度的增大,但无明显的线性规律。

啮合刚度具体计算结果如表 2 所示。

表 2 啮合刚度计算误差对比

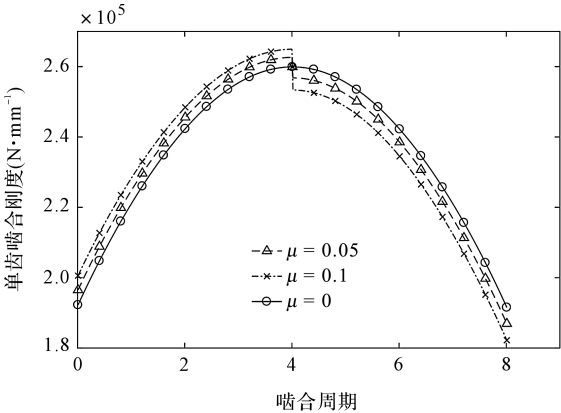
扭矩 (N·m)	计算方法	单齿啮合刚度 最大值/ (KN/mm)	相对 误差 /%	时变啮合刚度 平均值/ (KN/mm)	相对 误差 /%	计算 耗时/ h. min. s
30	解析	259	1.2	380	1.3	1 min 36 s
	FEM	256		375		3 h 47 min 54 s
200	解析	271	2.3	421	1.9	1 min 17 s
	FEM	265		413		3 h 58 min 21 s
400	解析	277	2.6	441	1.4	1 min 09 s
	FEM	270		435		4 h 11 min 43 s

由表 2 可知:解析法的计算误差能够保证在 3% 以内;同时计算耗时的对比方面,在保证精度的前提下,笔者所提出的齿廓修形直齿轮时变啮合刚度计算方法能够达到快速计算的目的。

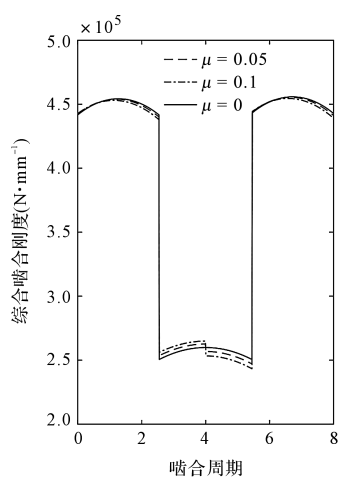
3.2 啮合刚度的影响因素分析

3.2.1 摩擦系数对啮合刚度的影响

$\mu=0, 0.05$ 和 0.1 , 扭矩为 30 Nm 的单齿与综合啮合刚度示意图,如图 9 所示。



(a) 不同摩擦系数的单齿啮合刚度



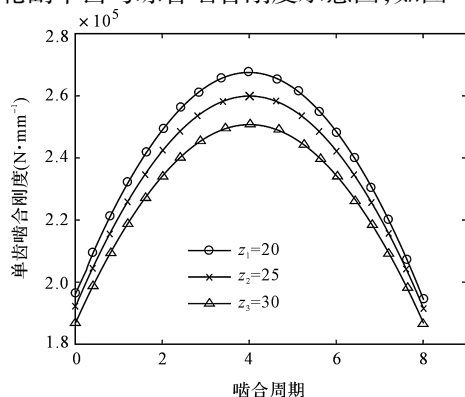
(b) 不同摩擦系数的综合啮合刚度

图 9 不同摩擦系数的啮合刚度

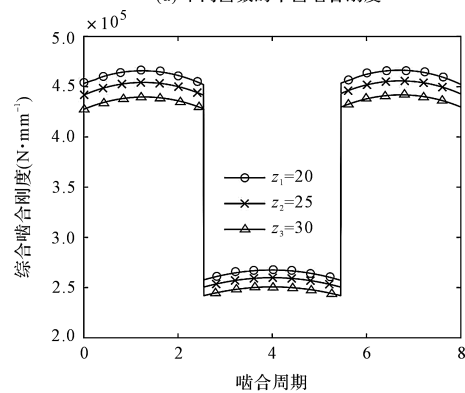
从图 9 中可知:摩擦力的作用使单齿刚度在啮入阶段增大,啮出阶段减小;节点处摩擦力的大小不变而方向发生突变,直齿轮副啮合刚度在节点处发生突变;摩擦因数越大,啮合刚度变化量越大。

3.2.2 齿数对啮合刚度的影响

$\mu = 0$, 扭矩 30 Nm, 小轮齿数分别为 20、25 以及 30 的直齿轮副单齿与综合啮合刚度示意图,如图 10 所示。



(a) 不同齿数的单齿啮合刚度



(b) 不同齿数的综合啮合刚度

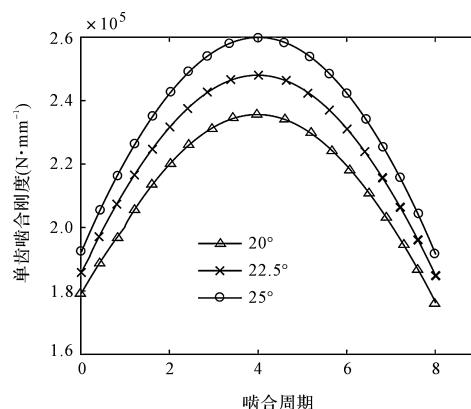
图 10 不同齿数的啮合刚度

由图 10 可知:随着小轮齿数的增大,啮合刚度减小。这是因为当齿数增加时,齿轮的齿厚和齿高参数不变,齿轮的节圆变大,法向力变小;扭矩不变时,齿轮

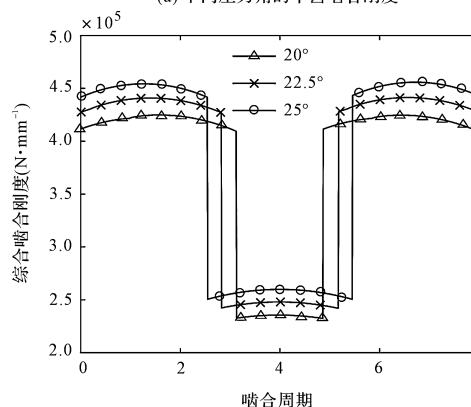
的啮合线位移减小。在啮合线位移和法向力的共同作用下,啮合刚度的变化即如图 10 所示,即随着主动齿轮齿数的增加,啮合刚度逐渐减小。

3.2.3 压力角对啮合刚度的影响

$\mu = 0$, 扭矩 30 Nm, 压力角分别为 20° 、 22.5° 以及 25° 的单齿与综合啮合刚度示意图,如图 11 所示。



(a) 不同压力角的单齿啮合刚度



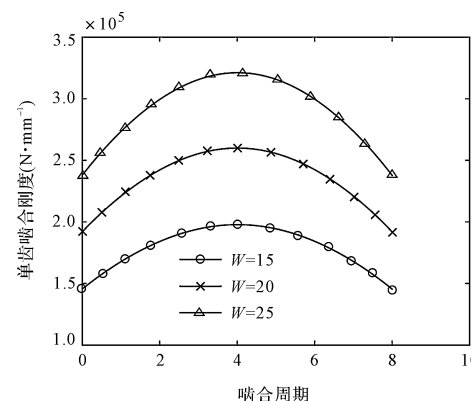
(b) 不同压力角的综合啮合刚度

图 11 不同压力角的啮合刚度

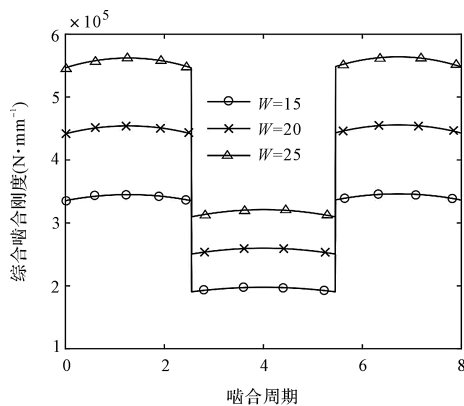
从图 11 中可知:当压力角增大时,单齿啮合刚度增大;但随着压力角的增大,接触比减小,单齿啮合段相对时间增大,多齿啮合间反而减小。

3.2.4 齿宽对啮合刚度的影响

$\mu = 0$, 扭矩 30 Nm, 齿宽分别为 15 mm、20 mm 以及 25 mm 的单齿与综合啮合刚度示意图,如图 12 所示。



(a) 不同齿宽的单齿啮合刚度



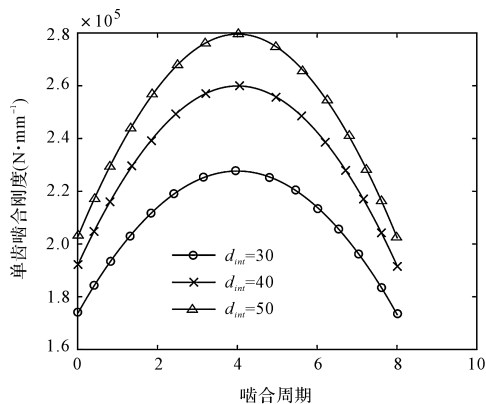
(b) 不同齿宽的综合啮合刚度

图 12 不同齿宽的啮合刚度

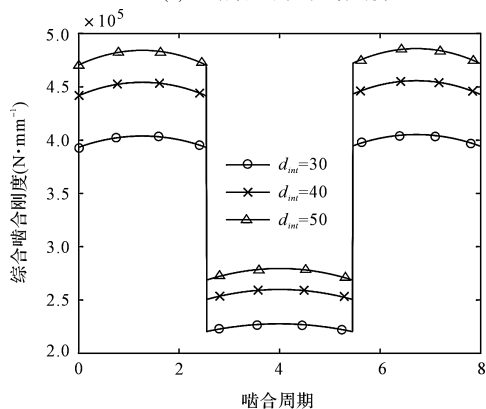
从图 12 中可知:增加轮齿宽度实际上增大了有效接触线长度,随着齿宽的增大,啮合刚度增大。

3.2.5 轴孔内径对啮合刚度的影响

$\mu=0$, 扭矩 30 Nm, 内孔直径分别为 30 mm、40 mm 以及 50 mm 的单齿与综合啮合刚度示意图,如图 13 所示。



(a) 不同内径的单齿啮合刚度



(b) 不同内径的综合啮合刚度

图 13 不同内径的啮合刚度

从图 13 中可知:随着内孔直径的增大,啮合刚度增大。

3.2.6 模数对啮合刚度的影响

$\mu=0$, 扭矩 30 Nm, 模数分别为 2 mm、3 mm 以及 4 mm 的直齿轮副单齿啮合刚度示意图,如图 14 所示。

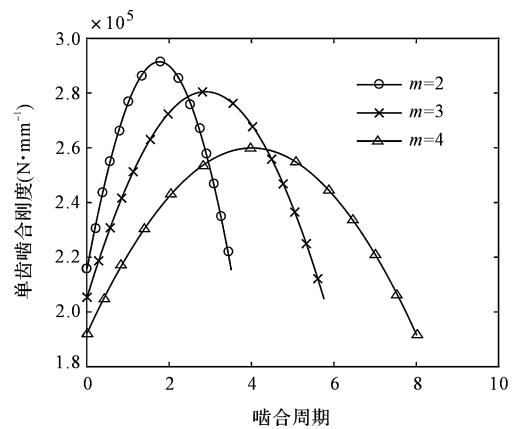


图 14 不同模数的单齿啮合刚度

从图 14 中可知:在内孔直径等参数不变的情况下,增大模数,使得啮合刚度减小。

4 结束语

笔者运用 B 样条曲面重构了齿轮的齿面方程,并结合齿轮的啮合原理完成了其接触分析;然后结合能量等效原理以及非线性赫兹接触模型,构建了齿廓修形直齿轮单齿啮合刚度模型;最后通过补充变形协调与力平衡方程,提出了一种考虑齿轮副非线性接触的,齿廓修形直齿轮综合啮合刚度模型。

研究结论如下:

(1) 基于能量等效原理与赫兹接触理论,将轮齿等效为齿根圆上的变截面悬臂梁模型,有效构建了适用不同载荷下的非线性接触齿廓修形直齿圆柱齿轮副单齿啮合刚度计算模型;

(2) 基于变形协调与力平衡原则,提出了齿廓修形直齿轮副综合啮合刚度快速解析计算模型,相较于 FEM 结果,其计算误差能够保证在 3% 以内,而计算速度快了 150 倍。因此,该啮合刚度模型能够在保证计算精度的前提下,达到快速计算的目的;

(3) 确定了啮合刚度与载荷、摩擦、齿数、压力角、内孔直径、有效接触线长度等参数有关。

对于裂纹、磨损等的线接触齿轮副的计算均可考虑上述计算方法。

在后续的工作中,笔者将进一步结合微元法以及点接触赫兹修正模型,完成齿向修形、齿廓和齿向双修形的直齿轮副时变啮合刚度计算方法的研究。

参考文献 (References):

- [1] WANG Qi-bin, XU Kun, HUAI Tian-shu, et al. A mesh stiffness method using slice coupling for spur gear pairs with misalignment and lead crown relief [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 90:845-861.

- [2] 陈思宇,谭儒龙,郭晓东,等. 直齿圆柱齿轮啮合刚度计算方法研究[J]. 重庆理工大学学报:自然科学,2021,35(1):97-103.
- [3] MA Hui, JIN Zeng, FENG Ran-jiao, et al. An improved analytical method for mesh stiffness calculation of spur gears with tip relief [J]. **Mechanism and Machine Theory**, 2016, 98(4):64-80.
- [4] 陈思宇,谭儒龙,郭晓东. 直齿锥齿轮啮合刚度计算方法研究[J]. 机械传动,2021,45(9):62-67.
- [5] WANG J, HOWARD I. The torsional stiffness of involute spur gears [J]. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, 2004, 218(1):131-142.
- [6] 唐进元,蔡卫星,王志伟. 修形圆柱齿轮啮合刚度计算公式[J]. 中南大学学报:自然科学版,2017,48(2):337-342.
- [7] 唐进元,王志伟,伊洪丽,等. 齿根裂纹与轮齿啮合刚度关联规律研究[J]. 机械传动,2014,38(2):1-4.
- [8] WANG J D. Numerical and Experimental Analysis of Spur Gears in Mesh [D]. Australia: Curtin University of Technology, 2003.
- [9] LI Shu-ting. Effects of machining errors, assembly errors and tooth modifications on loading capacity, load-sharing ratio and transmission error of a pair of spur gears [J]. **Mechanism and Machine Theory**, 2007, 42(6):698-726.
- [10] WU Yong-jun, WANG Jian-jun, HAN Qin-kai. Contact finite element method for dynamic meshing characteristics analysis of continuous engaged gear drives[J]. **Journal of Mechanical Science and Technology**, 2012, 26(6):1671-1685.
- [11] LI Run-fang, YANG Cheng-yun, LIN Teng-jiao, et al. Finite element simulation of the dynamical behavior of a speed-increase gearbox [J]. **Journal of Materials Processing Technology**, 2004, 150(1):170-174.
- [12] WU Si-yan, ZUO Ming, PAREY A. Simulation of spur gear dynamics and estimation of fault growth[J]. **Journal of Sound and Vibration**, 2008, 317(3):608-624.
- [13] TIAN X H. Dynamic Simulation for System Response of Gearbox Including Localized Gear Faults[D]. Edmonton: University of Alberta, 2004.
- [14] YANG D C H, Lin J Y. Hertzian damping, tooth friction and bending elasticity in gear impact dynamics [J]. **Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design**, 1987, 109(2):189-196.
- [15] CHEN Zai-gang, SHAO Yi-min. Mesh stiffness of an internal spur gear pair with ring gear rim deformation[J]. **Mechanism and Machine Theory**, 2013, 69(11):1-12.
- [16] CHEN Zai-gang, ZHOU Zi-wei, ZHAI Wan-ming, et al. Improved analytical calculation model of spur gear mesh excitations with tooth profile deviations [J]. **Mechanism and Machine Theory**, 2020, 149:103838.
- [17] 马辉,逢旭,宋溶泽,等. 基于改进能量法的直齿轮时变啮合刚度计算[J]. 东北大学学报:自然科学版,2014,35(6):863-866.
- [18] 万志国,瞿艳阳,曹宏瑞,等. 时变啮合刚度算法修正与齿根裂纹动力学建模[J]. 机械工程学报,2013,49(11):153-160.
- [19] MA Hui, FENG Meng-jiao, LI Zhan-wei, et al. Time-varying mesh characteristics of a spur gear pair considering the tip-fillet and friction [J]. **Meccanica**, 2017, 52(7):1695-1709.
- [20] MA Hui, PANG Xu, FENG Ran-jiao, et al. Improved time-varying mesh stiffness model of cracked spur gears [J]. **Engineering Failure Analysis**, 2015, 55(9):271-287.
- [21] 沈玲莉,陆宝山,季业益,等. 一种具修形的直齿锥齿轮副齿面接触分析方法[J]. 机械设计,2021,38(7):68-73.
- [22] 陈思宇. 直齿锥齿轮啮合刚度计算与加载接触分析[D]. 重庆:重庆理工大学机械工程学院,2021.
- [23] KIEKBUSCH T, SAPPOK D, SAUER B, et al. Calculation of the combined torsional mesh stiffness of spur gears with two-and three-dimensional parametrical FE models [J]. **Strojnicki Vestnik-Journal of Mechanical Engineering**, 2011, 57(11):810-818.
- [24] MUNRO R G, PALMER D, MORRISH L. An experimental method to measure gear tooth stiffness throughout and beyond the path of contact [J]. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, 2001, 215(7):793-803.
- [25] CORNELL R W. Compliance and stress sensitivity of spur gear teeth [J]. **Journal of Mechanical Design**, 1981, 103(2):447-459.
- [26] SAINOT P, VELEX P, DUVERGER O. Contribution of gear body to tooth deflections-a new bidimensional analytical formula [J]. **Journal of Mechanical Design**, 2004, 126(4):748-752.
- [27] REBBECCHI B, OSWALD F B, TOWNSEND D P. Measurement of Gear Tooth Dynamic Friction[C]//ASME Power Transmission and Gearing Conference Proceedings. San Diego, 1996, 88:355-363.
- [28] 唐进元,蒲太平. 基于有限元法的螺旋锥齿轮啮合刚度计算[J]. 机械工程学报,2011,47(11):23-29.

[编辑:司红岩]

本文引用格式:

王显彬,孙阳,王军龙. 一种改进的非线性接触齿廓修形直齿轮啮合刚度分析方法[J]. 机电工程,2022,39(12):1670-1677.

WANG Xian-bin, SUN Yang, WANG Jun-long. An improved method for analyzing meshing stiffness of nonlinear contact spur gear with tooth profile modification [J]. *Journal of Mechanical & Electrical Engineering*, 2022, 39(12):1670-1677.《机电工程》杂志: <http://www.meem.com.cn>