DOI:10.3969/j. issn. 1001 -4551. 2024. 03. 008

不确定转子系统动力学降阶模型构建与模型散度参数辨识*

张义彬[1],刘保国[1,2*],刘彦旭[1],励精为治[1]
(1. 河南工业大学 机电工程学院,河南 郑州 450001;2. 河南省超硬磨料磨削装备重点实验室,河南 郑州 450001)

摘要:在航空、航天、船舶等领域的实际工程转子系统中,广泛存在高维复杂的非线性系统。在航空发动机转子系统、燃气轮机转子系统等重点研究领域,通常还难以对高维复杂非线性系统进行直接的数据处理和分析统计。针对不确定性转子系统的模型维度较高等问题,提出了一种模型不确定性动力学降阶计算模型构建和模型散度参数辨识方法。首先,根据确定性动力学模型和静态矩阵降阶方法,完善了确定性动力学降阶模型;然后,基于随机矩阵理论和非参数动力学建模方法,提出了不确定性动力学降阶模型;最后,利用系统确定性模型的一阶临界转速、振型和实验数据,对不确定性动力学模型的散度参数进行了辨识;为了验证散度参数辨识方法的有效性,笔者又在转子实验平台上进行了实验验证。研究结果表明:实验结果与降阶之后振动响应均值的差异性较小,且与不确定性动力学模型相差不超过10%,表明所采用的理论模型在描述转子系统行为方面具备了较高的准确性和可靠性,该模型可以为深入研究模型不确定性转子系统提供参考。

关键词:转子-支承系统;不确定转子系统;动力学降阶模型;非线性系统;散度参数辨识;非参数建模方法;矩阵降阶方法
中图分类号:TH133;TH113　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1001 -4551(2024)03 -0438 -07

Construction method of dynamical reduced order model of uncertain rotor systems and identification of model dispersion parameters

ZHANG Yibin[1], LIU Baoguo[1,2], LIU Yanxu[1], LI Jingweizhi[1]
(1. School of Electrical Mechanical Engineering, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China;
2. Henan Key Laboratory for Super Abrasive Grinding Equipment, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: High dimensional and complex nonlinear systems widely exist in practical engineering rotor systems such as aviation, aerospace and shipbuilding. In the key research fields such as aviation engine rotor systems and gas turbine rotor systems, these high-dimensional complex systems are often difficult to directly process data and analyze statistics. A method of construction of dynamical reduced order model of uncertain rotor systems and identification of model dispersion parameters was proposed to address the problem of high model dimensions in uncertain rotor systems. Firstly, based on the deterministic dynamic model and the static matrix reduction method, the deterministic dynamic reduction model was further improved. Then, based on random matrix theory and non-parametric dynamic modeling methods, an uncertain dynamic reduction model was proposed. Finally, the divergent parameters of the uncertain dynamic model were identified using the first-order critical speed, vibration mode, and experimental data of the system deterministic model. The identification results of divergence parameters were experimentally verified on a rotor experimental platform. The research results indicate that the difference between the experimental results and the mean vibration response after reducing the order is small, and the difference between the experimental results and the uncertain dynamic model is not more than 10%, indicating that the theoretical model used has high accuracy and reliability in describing the behavior of the rotor system. This model can provide a reference for further research on the uncertain rotor system of the model.

Key words: rotor-support system; uncertain rotor system; dynamical reduced order model; nonlinear system; dispersion parameter identification; nonparametric modeling method; matrix reduction method

---

收稿日期:2023 -07 -10
基金项目:国家自然科学基金资助项目(12072106)
作者简介:张义彬(1997 -),男,河南郑州人,硕士研究生,主要从事转子动力学方面的研究。E-mail:377604727@qq. com
通信联系人:刘保国,男,教授,博士生导师。E-mail:bgliu1978@sina. com

0 引 言

转子系统作为航空发动机、燃气轮机等大型复杂旋转机械的核心部件,在其设计、加工、制造、安装和运转工作过程中普遍存在着不同因素导致的各种不确定性。比如,在转子系统启动过程时,因为材料磨损导致几何尺寸的不确定性[1-3],高温工作环境导致转子系统支承刚度的不确定性[4-5],外力干扰引起的载荷不确定性[6]等。

这些不确定性可以分为三类:1)系统自身结构的物理参数与几何参数随时间或环境的变化而产生的不确定性;2)外载荷的变异性引起的不确定性;3)模型简化引入的不确定性,即模型不确定性[7-8]。

在实际工程问题中,针对外载荷、支承刚度、节点质量、偏心距、转轴杨氏模量等参数不确定性,广泛采用的方法有摄动法[9]、多项式混沌展开[10-11]、广义多项式法[12-13]、蒙特卡洛模拟[14]等。这些方法虽然适用于处理参数不确定性,但并不适合用于处理模型简化引入的模型不确定性(如将转子简化为沿转轴轴线离散分布的集中质量点、模型降阶等)[15]。

为描述模型的不确定性,SOIZE C 等人[16]提出了基于随机矩阵理论的非参数方法,并将其用于处理结构动力学系统建模过程产生的模型不确定性,研究了正定质量矩阵和刚度矩阵的非参数随机建模方法。WU H 等人[17]基于最大熵原理和随机矩阵理论,提出了一种非参数 Riccati 整体传递模型。MATNEY A 等人[18]提出了新的 Galerkin 降阶方法,从有限变形的热弹性单元导出了一组响应和温度耦合的非线型微分方程组。曹文博等人[19]提出了一种基于正交降阶模型和梯度优化以加速稳态流场的收敛方法。杨少冲等人[20]对动载荷作用下的结构损伤识别进行了研究,建立了反映结构状态的降阶模型,以解决未知载荷作用下多自由度结构动力分析计算量大且难以收敛的问题。郑伶华等人[21]针对高速飞行器机翼结构,采用 POD 分解和代理模型技术,建立了气动噪声的降阶分析模型。

以上考虑转子系统模型不确定性的文献都把计算模型的散度参数假设为已知范围内的数值[22],但 SOIZE C 等人[23]利用结构有限阶弹性模态的实验数据和对应的计算结果,可对散度参数进行辨识。

笔者采用非参数建模方法和矩阵降阶方法,构建模型不确定转子-支承系统的不确定动力学降阶模型;提出利用低阶临界转速及振动数据对降阶模型的散度参数进行辨识,以期为结构更加复杂的转子系统不确定性建模、振动响应预测等研究提供参考。

1 不确定动力学降阶模型

1.1 确定性动力学模型

典型双圆盘转子-支承系统如图 1 所示。

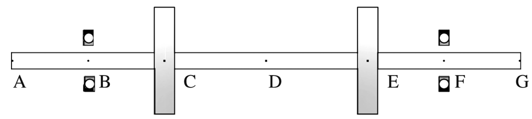


图 1 转子-支承系统

Fig. 1 Rotor support system

注:支承位置分别在点 B 和点 F 处,轮盘位置分别位于点 C 和点 E 处。

图 1 的转子-支承系统中,将支承处简化为支承刚度和阻尼,将其余单元处简化为集中质量,其轮盘处存在陀螺效应,则系统计算模型如图 2 所示。

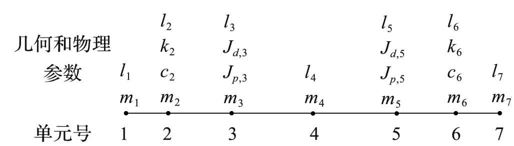


图 2 转子-支承系统计算模型

Fig. 2 Calculation model of rotor support system

根据图 2 所示的计算模型,可得其确定性动力学计算模型:

$$\bar{\boldsymbol{M}}\ddot{\bar{\boldsymbol{u}}} + \bar{\boldsymbol{C}}\dot{\bar{\boldsymbol{u}}} + \bar{\boldsymbol{K}}\bar{\boldsymbol{u}} = \bar{\boldsymbol{Q}} \tag{1}$$

式中:$\bar{\boldsymbol{u}}$为广义位移向量,即$\bar{\boldsymbol{u}} = (\bar{\boldsymbol{u}}_1, \bar{\boldsymbol{u}}_2)^{\mathrm{T}}$;$\bar{\boldsymbol{Q}}$为确定性动力学模型的不平衡广义力向量;$\bar{\boldsymbol{M}}$为质量矩阵;$\bar{\boldsymbol{C}}$为阻尼矩阵;$\bar{\boldsymbol{K}}$为刚度矩阵。

确定性动力学模型的不平衡广义力向量$\bar{\boldsymbol{Q}}$为:

$$\bar{\boldsymbol{Q}} = (\bar{\boldsymbol{Q}}_1, \bar{\boldsymbol{Q}}_2)^{\mathrm{T}} = \Omega^2(\bar{m}\bar{e}\cos\Omega t, \bar{m}\bar{e}\sin\Omega t)^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

其中:

$$\bar{m}\ \bar{e} = (\bar{m}_1\ \bar{e}_1, 0, \bar{m}_2\ \bar{e}_2, 0, \cdots, \bar{m}_N\ \bar{e}_N, 0) \tag{3}$$

$$\bar{\boldsymbol{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{M}}_1 & 0 \\ 0 & \bar{\boldsymbol{M}}_1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\bar{\boldsymbol{C}} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\boldsymbol{G}}_1 \\ -\bar{\boldsymbol{G}}_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{C}}_{11} & \bar{\boldsymbol{C}}_{12} \\ \bar{\boldsymbol{C}}_{21} & \bar{\boldsymbol{C}}_{22} \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\bar{\boldsymbol{K}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{K}}_1 & 0 \\ 0 & \bar{\boldsymbol{K}}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{K}}_{11} & \bar{\boldsymbol{K}}_{12} \\ \bar{\boldsymbol{K}}_{21} & \bar{\boldsymbol{K}}_{22} \end{bmatrix} \tag{6}$$

式中:$\bar{\boldsymbol{M}}_1$ 为确定性整体质量矩阵;$\bar{\boldsymbol{G}}_1$ 为陀螺矩阵;$\bar{\boldsymbol{C}}_{11}, \bar{\boldsymbol{C}}_{12}, \bar{\boldsymbol{C}}_{21}, \bar{\boldsymbol{C}}_{22}$为支承作用产生的阻尼矩阵;$\bar{\boldsymbol{K}}_1$ 为转轴刚度矩阵;$\bar{\boldsymbol{K}}_{11}, \bar{\boldsymbol{K}}_{12}, \bar{\boldsymbol{K}}_{21}, \bar{\boldsymbol{K}}_{22}$为支承作用产生的刚度矩阵;$e_i$ 为第 i 个单元处的轮盘偏心距;φ_i 为偏心

幅角。

支承刚度和阻尼的各向异性会使式(1)中的$\bar{\boldsymbol{C}}$和$\bar{\boldsymbol{K}}$不具有对称正定性质。

1.2 确定性动力学降阶模型

动力学模型的降阶能够缩短系统动力学特性的计算时间,其本质是对动力学模型的自由度数进行减缩。

式(1)所示动力学模型对应的齐次式如下:

$$\bar{\boldsymbol{M}}\ddot{\bar{\boldsymbol{u}}}+\bar{\boldsymbol{C}}\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}+\bar{\boldsymbol{K}}\bar{\boldsymbol{u}}=0 \tag{7}$$

式中:$\bar{\boldsymbol{u}}$为位移向量,即$\bar{\boldsymbol{u}}=(\bar{\boldsymbol{u}}_a,\bar{\boldsymbol{u}}_b)^{\mathrm{T}}$。

其中:$\bar{\boldsymbol{u}}_a$ 为节点主自由度位移向量;$\bar{\boldsymbol{u}}_b$ 为副自由度位移向量。

质量矩阵$\bar{\boldsymbol{M}}$、阻尼矩阵$\bar{\boldsymbol{C}}$、刚度矩阵$\bar{\boldsymbol{K}}$的元素重新排列采用分块矩阵的形式表达如下:

$$\bar{\boldsymbol{M}}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{M}}_{aa} & \bar{\boldsymbol{M}}_{ab}\\ \bar{\boldsymbol{M}}_{ba} & \bar{\boldsymbol{M}}_{bb}\end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\bar{\boldsymbol{C}}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{C}}_{aa} & \bar{\boldsymbol{C}}_{ab}\\ \bar{\boldsymbol{C}}_{ba} & \bar{\boldsymbol{C}}_{bb}\end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\bar{\boldsymbol{K}}=\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{K}}_{aa} & \bar{\boldsymbol{K}}_{ab}\\ \bar{\boldsymbol{K}}_{ba} & \bar{\boldsymbol{K}}_{bb}\end{bmatrix} \tag{10}$$

将式(8)~式(10)代入$\bar{\boldsymbol{M}}\ddot{\bar{\boldsymbol{u}}}+\bar{\boldsymbol{K}}\bar{u}=\bar{\boldsymbol{Q}}$,则有:

$$\bar{\boldsymbol{M}}_{ba}\ddot{\bar{\boldsymbol{u}}}_a+\bar{\boldsymbol{M}}_{bb}\ddot{\bar{\boldsymbol{u}}}_b+\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}\bar{\boldsymbol{u}}_a+\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}\bar{\boldsymbol{u}}_b=\bar{\boldsymbol{Q}}_b \tag{11}$$

如果不计惯性力对副自由度的影响,则考虑自由振动时,式(11)可简化为:

$$\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}\bar{\boldsymbol{u}}_a+\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}\bar{\boldsymbol{u}}_b=0 \tag{12}$$

由此可得副自由度位移向量为:

$$\bar{\boldsymbol{u}}_b=-\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}\bar{\boldsymbol{u}}_a \tag{13}$$

引入 a 阶单位矩阵 $\boldsymbol{I}$,则位移向量$\bar{\boldsymbol{u}}$为:

$$\bar{\boldsymbol{u}}=\begin{Bmatrix}\bar{\boldsymbol{u}}_a\\ \bar{\boldsymbol{u}}_b\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\bar{\boldsymbol{u}}_a\\ -\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}\bar{\boldsymbol{u}}_a\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ -\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{u}}_a=\bar{\boldsymbol{T}}\bar{\boldsymbol{u}}_a \tag{14}$$

转子系统的动能$\bar{\boldsymbol{T}}$与势能$\bar{\boldsymbol{V}}$可分别表示为:

$$\bar{\boldsymbol{T}}=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{M}}_d\dot{\boldsymbol{u}}=\frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{T}}\bar{\boldsymbol{u}}_a)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{M}}_d(\bar{\boldsymbol{T}}\bar{\boldsymbol{u}}_a) \tag{15}$$

$$\bar{\boldsymbol{V}}=\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}_d\bar{\boldsymbol{u}}=\frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{T}}\bar{\boldsymbol{u}}_a)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}_d(\bar{\boldsymbol{T}}\bar{\boldsymbol{u}}_a) \tag{16}$$

经过矩阵降阶的转子系统质量矩阵$\bar{\boldsymbol{M}}_R$、阻尼矩阵$\bar{\boldsymbol{C}}_R$、刚度矩阵$\bar{\boldsymbol{K}}_R$ 和力向量$\bar{\boldsymbol{Q}}_R$ 分别为:

$$\bar{\boldsymbol{M}}_R=\bar{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{M}}\bar{\boldsymbol{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ -\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{M}}_{aa} & \bar{\boldsymbol{M}}_{ab}\\ \bar{\boldsymbol{M}}_{ba} & \bar{\boldsymbol{M}}_{bb}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ -\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}\end{bmatrix}=$$
$$\bar{\boldsymbol{M}}_{aa}-\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{M}}_{ba}-\bar{\boldsymbol{M}}_{ab}\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}+\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{M}}_{bb}\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_{ba} \tag{17}$$

$$\bar{\boldsymbol{K}}_R=\bar{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}\bar{\boldsymbol{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ -\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{K}}_{aa} & \bar{\boldsymbol{K}}_{ab}\\ \bar{\boldsymbol{K}}_{ba} & \bar{\boldsymbol{K}}_{bb}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ -\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}\end{bmatrix}=$$
$$\bar{\boldsymbol{K}}_{aa}-\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}-\bar{\boldsymbol{K}}_{ab}\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}+\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_{ba} \tag{18}$$

$$\bar{\boldsymbol{C}}_R=\bar{\boldsymbol{T}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ -\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{C}}_{aa} & \bar{\boldsymbol{C}}_{ab}\\ \bar{\boldsymbol{C}}_{ba} & \bar{\boldsymbol{C}}_{bb}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ -\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}\end{bmatrix}=$$
$$\bar{\boldsymbol{C}}_{aa}-\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{C}}_{ba}-\bar{\boldsymbol{C}}_{ab}\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}+\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-T}\bar{\boldsymbol{C}}_{bb}\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_{ba} \tag{19}$$

$$\bar{\boldsymbol{Q}}_R=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ -\bar{\boldsymbol{K}}_{bb}^{-1}\bar{\boldsymbol{K}}_{ba}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix}\bar{\boldsymbol{Q}}_a\\ \bar{\boldsymbol{Q}}_b\end{Bmatrix} \tag{20}$$

综合式(8)~式(20)可得转子系统确定性动力学降阶模型为:

$$\bar{\boldsymbol{M}}_R\ddot{\bar{\boldsymbol{u}}}_a+\bar{\boldsymbol{C}}_R\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}_a+\bar{\boldsymbol{K}}_R\bar{\boldsymbol{u}}_a=\bar{\boldsymbol{Q}}_R \tag{21}$$

1.3 不确定动力学降阶模型

设 $\boldsymbol{B}_d$ 为 n 阶满秩实数矩阵,对应的随机矩阵记为 $\boldsymbol{B}_r$,且 $\boldsymbol{B}_d$ 和 $\boldsymbol{B}_r$ 满足:

$$\boldsymbol{B}_d=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{B}_r) \tag{22}$$

式中:$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{B}_r)$为求随机矩阵 $\boldsymbol{B}_r$ 的均值矩阵。

对矩阵 $\boldsymbol{B}_d$ 进行极分解,则有:

$$\boldsymbol{B}_d=\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{U} \tag{23}$$

式中:$\boldsymbol{U}$ 为正交矩阵;$\boldsymbol{H}_2$ 为正定矩阵。

由于满秩实数矩阵极分解的极因子矩阵是唯一存在的,因此可用左极分解的方法构造随机矩阵 $\boldsymbol{B}_r$,即:

$$\boldsymbol{B}_r=\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{B}_r}\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{B}_r} \tag{24}$$

对 $\boldsymbol{B}_r$ 进行奇异值分解,可推导出矩阵 $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{B}_r}$ 和 $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{B}_r}$ 为:

$$\boldsymbol{B}_r=\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{B}_r}\sum\nolimits_{\boldsymbol{B}_r}\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{B}_r}=\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{B}_r}\sum\nolimits_{\boldsymbol{B}_r}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{B}_r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{B}_r}\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{B}_r} \tag{25}$$

其中:矩阵 $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{B}_r}\sum_{\boldsymbol{B}_r}\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{B}_r}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{B}_r}$;矩阵 $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{B}_r}\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{B}_r}$ 为 $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{B}_r}$。

根据式(23)~式(25),可将转子系统的不对称刚度矩阵及阻尼矩阵表示为:

$$\boldsymbol{K}_r=\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{K}_r}\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{K}_r} \tag{26}$$

式中:$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{K}_r}$为随机矩阵。

$$\boldsymbol{C}_r=\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{C}_r}\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{C}_r} \tag{27}$$

根据文献[24]的非参数动力学建模方法,式(26)中 $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{K}_r}$为随机矩阵,且满足:

$$\boldsymbol{H}_{K_r}=\boldsymbol{U}_H^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{U}_H \tag{28}$$

式中:$\boldsymbol{U}_H$ 为上三角实数矩阵,是对 $\boldsymbol{H}_d$ 进行乔列斯基分解得到的;$\boldsymbol{G}$ 为 Wishart 随机矩阵,其分解形式为 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{U}_G^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_G$;$\boldsymbol{U}_G$ 为上三角实数随机矩阵,其各非零元素 u_{ij}是统计独立的。

主对角线以上的元素 $u_{ij}(i<j)$为高斯随机变量,其均值 $E\{u_{ij}\}=0$,方差为 $\sigma_{u_{ij}}^2=\delta^2(n+1)$,其中,散度参数 δ 表示 u_{ij}的离散水平。主对角线上的元素 $u_{ii}=[2\delta^2\omega_i/(n+1)]^{1/2}$,$\omega_i$ 服从尺度参数和形状参数分别为 $a_{n,i}$和 $b_{n,i}$的伽马分布;其中,$a_{n,i}=(2\delta^2)^{-1}[\delta^2(1-i)+n+1]$,$b_{n,i}=1$。

利用 $\boldsymbol{H}_d$ 和 $\boldsymbol{G}$ 的上三角因子矩阵可计算出 $\boldsymbol{H}_{K_r}$和 $\boldsymbol{H}_{C_r}$,再将结果代入式(26)和式(27)中,便得到不确定刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_r$ 和不确定阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}_r$:

$$\boldsymbol{K}_r=\boldsymbol{U}_{H_K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{G_K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{G_K}\boldsymbol{U}_{H_K}\boldsymbol{U}_{K_r} \tag{29}$$

$$\boldsymbol{C}_r=\boldsymbol{U}_{H_C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{G_C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{G_C}\boldsymbol{U}_{H_C}\boldsymbol{U}_{C_r} \tag{30}$$

将式(21)中的确定性矩阵$\overline{\boldsymbol{M}}_R$、$\overline{\boldsymbol{C}}_R$、$\overline{\boldsymbol{K}}_R$ 替换为 $\boldsymbol{M}_r$、$\boldsymbol{C}_r$、$\boldsymbol{K}_r$,则系统的不确定动力学降阶模型为:

$$\boldsymbol{M}_r\ddot{\boldsymbol{u}}_r+\boldsymbol{C}_r\dot{\boldsymbol{u}}_r+\boldsymbol{K}_r\boldsymbol{u}_r=\overline{\boldsymbol{Q}}_R \tag{31}$$

式中:$\boldsymbol{M}_r$ 为随机矩阵,$\boldsymbol{M}_r=\boldsymbol{U}_{H_M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{G_M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{G_M}\boldsymbol{U}_{H_M}$。

其中:$\boldsymbol{U}_{H_M}$满足 $\boldsymbol{U}_{H_M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{H_M}=\overline{\boldsymbol{M}}$。

2　模型散度参数辨识方法

在第1.3节中,笔者构建了转子系统的不确定转子-支承系统的动力学模型,但模型中的散度参数是未知的。

根据文献[25]的方法,利用实验得到的振型矩阵 $\boldsymbol{\Psi}$ 和确定性动力学模型的振型矩阵 $\boldsymbol{\varphi}$ 可对不确定动力学降阶模型中的散度参数进行辨识。

假设 $\boldsymbol{u}$ 为实验得到的广义坐标列向量,$\boldsymbol{u}^d$ 为确定性动力学计算模型的广义坐标列向量,则有:

$$\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{u}^d \tag{32}$$

对式(32)进行矩阵变换,在等式两边分别左乘矩阵$(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi})^{-1}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\varphi$,则 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi})^{-1}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}u^d$。

利用这种矩阵变换方法对实际质量矩阵$\widetilde{\boldsymbol{M}}$、阻尼矩阵$\widetilde{\boldsymbol{C}}$、刚度矩阵$\widetilde{\boldsymbol{K}}$进行变换,记 $\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi})^{-1}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}$,令$\widetilde{\boldsymbol{A}}$为$\widetilde{\boldsymbol{M}}$、$\widetilde{\boldsymbol{C}}$、$\widetilde{\boldsymbol{K}}$,则:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{S} \tag{33}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}_A^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{G}}_A\boldsymbol{U}_A$,其中上三角实数矩阵 $\boldsymbol{U}_A$ 满足 $\boldsymbol{U}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_A=\boldsymbol{A}_d$。因此$\widetilde{\boldsymbol{G}}_A=\boldsymbol{U}_A^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_A^{-1}$。

根据式(28)中矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的性质,用得到的矩阵$\widetilde{\boldsymbol{G}}_A$对散度参数进行估计:

$$\delta_A\approx n^{-1/2}\parallel\widetilde{\boldsymbol{G}}_A-\boldsymbol{I}\parallel_F \tag{34}$$

式中:$\parallel\widetilde{\boldsymbol{G}}_A-\boldsymbol{I}\parallel_F$ 为$\widetilde{\boldsymbol{G}}_A-\boldsymbol{I}$ 的弗罗贝尼乌斯范数(Frobenius norm),利用式(34)可分别估计出 δ_M、δ_C、δ_K。

3　辨识方法的实验验证

3.1　实验步骤

为了验证散度参数辨识方法的有效性,笔者在转子实验平台上进行实验验证。

转子实验台实物图如图3所示。

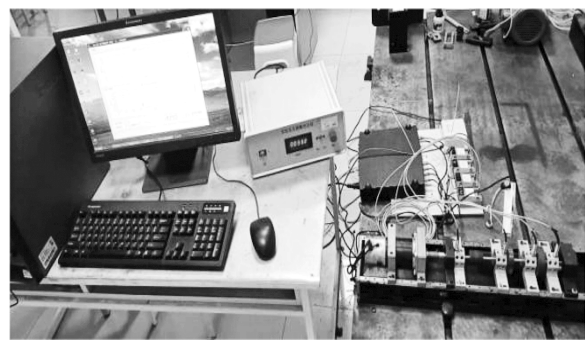


图3　转子实验台
Fig.3　Rotor test bench

实验分为三个步骤:1)对图3的转子系统进行确定性动力学建模,并计算出其最低阶临界转速和主振型;2)利用第2节的方法估算出散度参数的数值;3)采用第1节的方法建立的不确定系统非参数动力学计算模型,计算出3 800 r/min以内的不平衡位移响应结果,并将其和确定性动力学模型所计算的振动响应进行对比分析。

转子实验台参数如表1所示。

表1　转子实验台参数
Table 1　Parameters of the rotor test bench

参数/单位	数值
转轴半径 r/m	0.005
转轴弹性模量 E/($\times10^{11}$ N/m^2)	2.060
轴长度 l_i/m	0.408
轮盘质量 m_i/kg	0.500,0.670,0.340
轮盘直径 d_i/m	0.390,0.390,0.020
支撑刚度 k_i/(N/m)	6.0×10^7,6.0×10^7
观测点位置距轴左端距离/m	0.058/0.193/0.278/0.343
Disc2处的不平衡质量 m_u/kg	3.59×10^{-4}
Disc2处的不平衡质量块的偏心距 e/m	0.03

3.2　估算散度参数

根据第 1 节的动力学模型构建方法，以及表 1 的具体参数，可得到式(2) ~ 式(6)中转子系统的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵$\overline{\boldsymbol{M}}_1$、$\overline{\boldsymbol{G}}_1$、$\overline{\boldsymbol{K}}_1$、$\overline{\boldsymbol{K}}_{11}$、$\overline{\boldsymbol{K}}_{12}$、$\overline{\boldsymbol{K}}_{21}$、$\overline{\boldsymbol{K}}_{22}$、$\overline{\boldsymbol{C}}_{11}$、$\overline{\boldsymbol{C}}_{12}$、$\overline{\boldsymbol{C}}_{21}$和$\overline{\boldsymbol{C}}_{22}$。

利用确定性动力学模型可以得到转子系统的坎贝尔图，如图 4 所示。

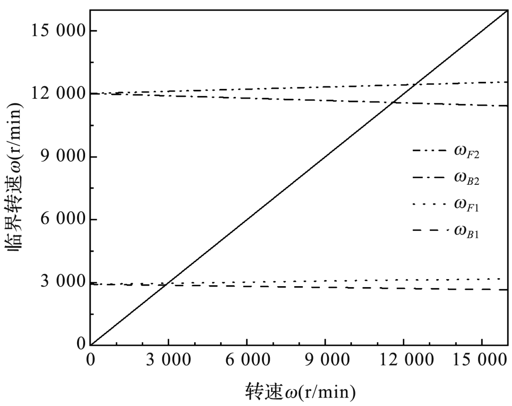


图 4　确定性动力学计算模型 Campbell 图

Fig. 4　Campbell diagram of deterministic dynamic calculation model

由图 4 可知，确定性系统的一阶反、正进动临界转速分别为 ω_{Bc1} = 2 872 r/min 和 ω_{Fc1} = 2 967 r/min。

实际上，由于系统中不平衡质量激励的存在，转子的同步涡动一般为正向涡动。因此，这里选用一阶正进动临界转速 ω_{c1} = 2 967 r/min 来计算确定性系统的一阶振型 $\boldsymbol{\varphi}_1^d$，结果如图 5 所示。

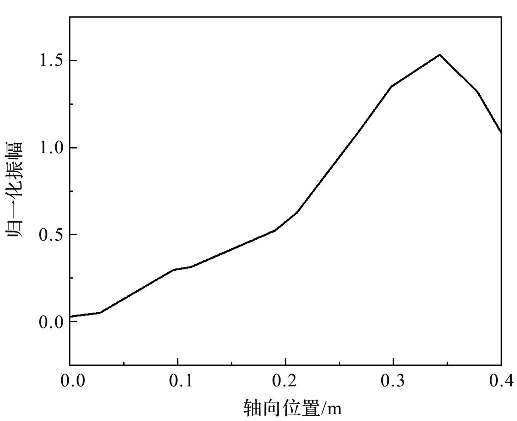


图 5　确定性动力学计算模型的一阶振型

Fig. 5　First order vibration mode of deterministic dynamic show calculation model

转子系统一阶振型如图 6 所示。

利用图 3 所示转子实验台得到一阶振型 ψ_1，图 6 展示了确定性计算模型得到的 $\boldsymbol{\varphi}_1^d$ 和实验得到的 $\boldsymbol{\Psi}_1$。

根据 $\boldsymbol{\varphi}_1^d$ 和 $\boldsymbol{\Psi}_1$，利用第 2 节给出的散度参数识别方法，可以得到 $\boldsymbol{\varphi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$，即 $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_1^d$，$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}_1$，并由 $\boldsymbol{\varphi}$ 和

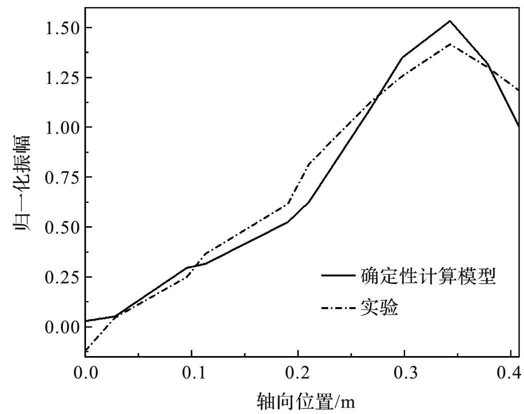


图 6　转子系统一阶振型

Fig. 6　First order vibration mode of rotor system

$\boldsymbol{\Psi}$ 计算出矩阵 $\boldsymbol{S}$：

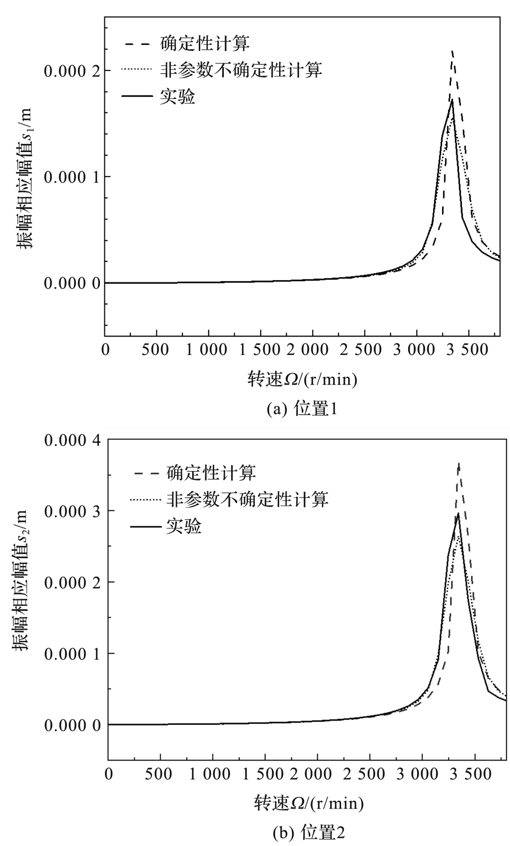
$$\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi})^{-1}\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi} \tag{35}$$

将矩阵 $\boldsymbol{S}$ 代入式(33) ~ 式(34)，估算出的散度参数为 δ_M = 0.018 4，δ_K = 0.130 9。

3.3　散度参数辨识结果的实验验证

笔者将图 3 所示的转子系统划分为 20 个节点，利用 1.2 节降阶方法将节点数减缩为 11 个，采用第 1 节的非参数动力学降阶计算模型和第 3.2 节的散度参数识别结果，预测在 3 500 r/min 转速范围内 4 个位置处的振动位移响应结果，对实验数据与预测结果进行比较和分析。

实验结果与非参数不确定动力学计算模型预测结果对比如图 7 所示。



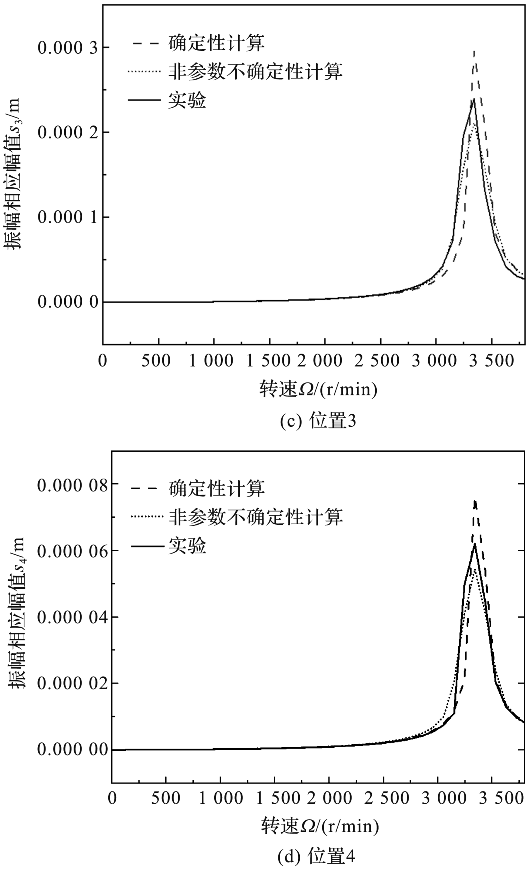


图 7　振动响应实测结果与非参数动力学模型预测的对比

Fig. 7　Comparison of vibration response measurement results with non parametric dynamic model predictions

图 7 实验结果表明:在转速范围 3 000 r/min 内,实验测出的振动响应曲线、确定性计算模型和非参数不确定动力学计算模型所得到的振动响应曲线几乎重合。但是在 3 000 r/min ~ 3 800 r/min 转速区间时,非参数动力学计算模型的预测均值曲线相比确定性动力学计算模型更接近实际振动响应曲线。

在转速时:

在位置 1 处,确定性和不确定性动力学振动响应幅值分别为 2.17×10^{-4} m 和 1.55×10^{-4} m,与实测结果 1.72×10^{-4} m 相比分别相差 26.47% 和 10.21%,与确定性模型相比,非参数模型的预测结果更接近实际结果。

在位置 2 处,两种计算模型的振动响应幅值分别为 3.69×10^{-4} m 和 2.67×10^{-4} m,与实际结果 2.96×10^{-4} m 相比分别相差 24.66% 和 9.79%。

在位置 3 处,两种计算模型的振动响应幅值分别为 2.95×10^{-4} m 和 2.11×10^{-4} m,与实际结果 2.39×10^{-4} m 相比分别相差 23.43% 和 11.71%。

在位置 4 处,两种计算模型的振动响应幅值分别为 7.61×10^{-4} m 和 5.45×10^{-4} m,与实际结果 6.22×10^{-4} m 相比分别相差 22.34% 和 12.37%。

根据以上四个位置的振动响应实验对比可知:非参数动力学模型的均值计算结果与实际结果更相近,表示第一节提出的模型比转子系统确定性模型更合理;并且,在散度参数计算中得到的散度参数 $\delta_M = 0.018\,4$,$\delta_K = 0.130\,9$ 也相对合理。

4　结束语

针对不确定性转子系统,基于随机矩阵理论和非参数动力学建模方法,笔者构建了模型不确定性动力学降阶计算模型;利用系统确定性模型的一阶临界转速、振型和实验数据,对动力学模型的散度参数进行了辨识;并在转子实验台上对散度参数辨识结果进行了实验验证。

研究结果表明:

1)将非参数建模与矩阵极分解方法相融合,并进行静态矩阵降阶,可以建立具有模型不确定性的转子系统动力学计算模型;

2)转速在 3 000 r/min 范围内时,由确定性动力学模型和不确定动力学模型得到的振动响应均与实际结果接近;转速在 3 000 r/min ~ 3 800 r/min 范围时,不确定动力学计算模型的均值计算结果比确定性动力学模型更接近实际结果。表明在转子模型中考虑模型不确定性更加合理。

在后续的研究工作中,笔者拟将动态矩阵降阶方法应用于模型不确定性转子系统中。

参考文献(References):

[1]　CAPIEZ L E, SOIZE C. Nonparametric modeling of random uncertainties for dynamic response of mistuned bladed disks [J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2004,126(1):610-618.

[2]　SINHA A. Reduced-order model of a bladed rotor with geometric mistuning [J]. Journal of Turbmachinery, 2009, 131(3):1-7.

[3]　MADDEN A, EPUREANU B I, FILIPPI S. Reduced-order modeling approach for blisks with large mass, stiffness, and geometric mistuning [J]. AIAA. Journal, 2012, 50 (2): 366-374.

[4]　章　健,张大义,王永锋,等. 共用支承-转子结构系统振动耦合特性分析[J]. 北京航空航天大学学报,2019,45(9):1902-1910.
ZHANG Jian, ZHANG Da-yi, WANG Yong-feng, et al. Coupling vibration characteristics analysis of shared support-rotors system [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics,2019,45(9):1902-1910.

[5]　雷冰龙,李　超,何　康,等. 共用支承-转子系统耦合振动分析及试验[J]. 航空动力学报, 2020, 35 (11): 2293-2305.

LEI Bing-long, LI Chao, HE Kang, et al. Coupling vibration characteristics analysis and experiment of shared support-rotors system[J]. Journal of Aerospace Power,2020, 35(11):2293-2305.

[6] CAPIEZ L E, SOIZE C. Nonlinear stochastic dynamics of detuned bladed-disks with uncertain mistuning and detuning optimization using a probabilistic machine learning tool[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2022, 143 (1):104023.

[7] GAN C, WANG Y, YANG S. Nonparametric modeling on random uncertainty and reliability analysis of a dual-span rotor[J]. Journal of Zhejiang University-Science A,2018,19 (3):189-202.

[8] WANG Xiao-jun, QIU Zhi-ping. Interval finite element analysis of wing flutter[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2008,21(2):134-140.

[9] 刘保国,梁国珍,苏林林,等. 基于摄动法的随机参数转子系统动力响应的概率密度分析[J]. 机械强度,2013,35 (4):400-405.
LIU Bao-guo, LIANG Guo-zhen, SU Lin-lin, et al. Probability density analysis of the dynamic response of random parametricalrotor system based on the perturbation method[J]. Journal of Mechanical Strength,2013,35(4): 400-405.

[10] 王　存. 基于切比雪夫多项式展开的转子动力特性区间分析[J]. 航空动力学报,2020,35(4):757-765.
WANG Cun. Interval analysis of rotor dynamic characteristics based on Chebyshev polynomials expansion [J]. Journal of Aerospace Power,2020,35(4):757-765.

[11] SOIZE C. Polynomial chaos expansion of a multimodal random vector [J]. SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification,2015,3(1):34-60.

[12] SNOUN C, BERGEOT B, BERGER S. Prediction of the dynamic behavior of an uncertain friction system coupled to nonlinear energy sinks using a multi-element generalized polynomial chaos approach [J]. European Journal of Mechanics A-Solids,2020,80(1):103917.

[13] 杨淮文. 高速电主轴不确定性动力学建模及振动响应分析[D]. 郑州:河南工业大学机电工程学院,2022.
YANG Huai-wen. Dynamic Modeling and Vibration Response Analysis of High-speed Motorized Spindle with Uncertatinty [D]. ZhengZhou: School of Electrical- mechanical Engineering, Henan University of Technology,2022.

[14] ZHANG H, BAI C, MAO Y, et al. Stochastic finite element modeling and response analysis of rotor systems with random properties under random loads[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2015, 29 (8): 3083-3090.

[15] 刘彦旭,刘保国,冯　伟,等. 不确定双圆盘转子系统振动响应分析[J]. 航空动力学报,2021,36(3):488-497.
LIU Yan-xu, LIU Bao-guo, FENG Wei, et al. Vibration responses analysis for double disks rotor system with uncertainties [J]. Journal of Aerospace Power, 2021, 36 (3):488-497.

[16] SOIZE C. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2000, 15 (3): 277-294.

[17] WU H, LIU B, LIU Y, et al. Natural characteristics analysis of a dual-rotor system with nonparametric uncertainty[J]. Applied Sciences,2022,12(24):12573.

[18] MATNEY A, PEREZ R, SONG P, et al. Thermal-structural reduced order models for unsteady/dynamic response of heated structures in large deformations [J]. Applicationsin Engineering Science,2022,12(2):100119.

[19] 曹文博,刘溢浪,张伟伟. 基于降阶模型和梯度优化的流场加速收敛方法[J]. 航空学报,2023,44(6):122-132.
CAO Wen-bo, LIU Yi-lang, ZHANG Wei-wei. Accelerated convergence method for fluid dynamics solvers based on reducedorder model and gradient optimization [J]. Acta Aeronautica ET AstronauticaSinica,2023,44(6):122-132.

[20] 杨少冲,姚　远,刘家亮,等. 基于递归本征正交分解与强跟踪扩展卡尔曼滤波的结构损伤识别[J/OL]. 振动工程学报:1-9[2023-08-29]. http://kns. cnki. net/kcms/detail/32. 1349. TB. 20230605. 1130. 002. html
YANG Shao-chong, YAO Yuan, LIU Jia-liang, et al. Structural damage identification based on recursive proper orthogonal decomposition and strong tracking extended Kalman filtering[J/OL]. Journal of Vibration Engineering: 1-9[2023-08-29]. http://kns. cnki. net/kcms/detail/32. 1349. TB. 20230605. 1130. 002. html

[21] 郑伶华,陈　强,李彦斌,等. 动态大气环境下高速飞行器气动噪声不确定性量化研究[J]. 振动与冲击. 2023, 42(14):306-313.
ZHENG Ling-hua, CHEN Qiang, LI Yan-bin, et al. Uncertainty quantification for the aerodynamic noise of high-speed aircrafts in dynamic atmospheric environment [J]. Journal of Vibration Engineering, 2023, 42 (14): 306-313.

[22] 熊耀强,吴平,赵建平. Ⅳ型储氢气瓶内衬材料的氢渗透行为分子动力学模拟[J]. 压力容器,2023,40(7): 19-28.
XIONG Yao-qiang, WU Ping, ZHAO Jian-ping. Molecular dynamics simulations on hydrogen permeation of modified polymer liner for type Ⅳ storage vessels [J]. Pressure Vessel Technology,2023,40(7):19-28.

[23] SOIZE C. Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194 (12-16): 1333-1366.

[24] MIGNOLET M P, SOIZE C. Nonparametric stochastic modeling of linear systems with prescribed variance of several natural frequencies [J]. Probabilistic Engineering Mechanics,2008,23(2):267-278.

[25] SOIZE C. A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics [J]. Journal of Sound and Vibration,2005,288(2):623-652.

本文引用格式:

张义彬,刘保国,刘彦旭,等. 不确定转子系统动力学降阶模型构建与模型散度参数辨识[J]. 机电工程,2024,41(3):438 – 444.

ZHANG Yibin, LIU Baoguo, LIU Yanxu, et al. Construction method of dynamical reduced order model of uncertain rotor systems and identification of model dispersion parameters[J]. Journal of Mechanical & Electrical Engineering, 2024,41(3):438 – 444.　《机电工程》杂志:http://www.meem.com.cn